UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Programa de Post-Graduação em Estatística

Katerine Zuniga Lastra, Marília de Melo Sombra, Alex Monito Nhancololo

Lista 01 – Semestre de 2024-II – Prof. Silvia Ferrari

5) Admita que X tem distribuição arco-seno com parâmetros $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma \in \mathcal{R}_+$ e densidade:

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\pi\sqrt{(x-\mu)\,(\mu+\sigma-x)}}, \quad x \in (\mu, \mu+\sigma). \tag{1}$$

Mostre que a classe de possíveis distribuições de X é uma família de localização-escala.

Resolução:

Uma classe de possíveis distribuições da variável aleatória (v.a.) X pertencerá à família de localização-escala se puder ser escrita na forma $X = \mu + \sigma U$, ou seja,

$$P(X \le x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ ou } f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot f_U\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ onde, } f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

U é uma v.a. com função densidade (massa) de probabilidade $f_U(\cdot)$ conhecida (fixa), $\mu \in \mathcal{R}$ é o parâmetro de localização, e $\sigma \in \mathcal{R}_+$ é o parâmetro de escala.

Assim, tomando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, e substituindo na distribuição arco-seno (1), obtém-se a distribuição arco-seno padrão, dada por:

$$\begin{aligned} p(x;\mu=0,\sigma=1) = f_U(x;\mu=0,\sigma=1) &= \frac{1}{\pi\sqrt{(x-0)\,(0+1-x)}}, \quad x \in (0, 0+1) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{x\,(1-x)}}, \quad x \in (0,1). \end{aligned} \tag{2}$$

Considerando a expressão $f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot f_U\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(1-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}}, \text{ substituindo } x \text{ por } \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ na eq. (2)} \\ &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{\sigma-x+\mu}{\sigma}\right)}}, \quad \text{igualando denominadores de } 1-\frac{x-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{(x-\mu)(\sigma-x+\mu)}{\sigma^2}}} \\ &= \frac{1}{\cancel{\sigma}}\cdot\frac{1}{\frac{\pi\sqrt{(x-\mu)(\mu+\sigma-x)}}{\cancel{\sigma}}} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{(x-\mu)\,(\mu+\sigma-x)}}, \quad x \in (\mu,\mu+\sigma) \\ &= p(x;\mu,\sigma), \text{ apresentada na equação 1.} \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $p(x;\mu,\sigma)$ é da família de localização-escala.

9) A partir de propriedades da família exponencial (eq: 3) encontre as funções geradoras de momentos e de cumulantes, a média e o segundo, o terceiro e o quarto momento central da distribuição Gama(a, b).

$$p_\theta(x) = \exp\left[\sum_{i=1}^{s} \eta_i(\theta) T_i(x) - B(\theta)\right] \cdot h(x) \tag{3}$$

Resolução

A função distribuição gama pode ser expressa por:

$$
\begin{aligned}
f(x;a,b) &= \frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} \exp\left[-\frac{x}{b}\right], \; a>0, b>0 \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \exp\left[log\left(\frac{1}{b^a}\right)\right] x^{a-1} \exp\left[-\frac{x}{b}\right], \quad \frac{1}{b^a} > 0, \text{ e } \mathbf{a} \text{ conhecido (fixo)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \exp\left[log\left(b^{-a}\right)\right] x^{a-1} \exp\left[-\frac{x}{b}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \exp\left[-a\, log\,(b)\right] x^{a-1} \exp\left[-\frac{x}{b}\right], \quad b>0 \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp\left[-a\, log\,(b) - \frac{x}{b}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp\left[-\frac{1}{b}x - a\, log\,(b)\right], \quad \text{que corresponde a família exponencial, com}
\end{aligned}
$$

$h(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1}$, $T(x) = x$, $\eta_i(\theta) = -\frac{1}{b}$, $B(\theta) = a\, log\,(b)$

A função exponencial da eq. (3), quando escrita na forma canônica $\eta_i(\theta) = \eta$ e $\mathrm{B}(\theta) = \mathcal{A}(\eta)$. Assim, sob esta notação, $\eta = -\frac{1}{b} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{\eta}$ e $\mathcal{A}(\eta) = a\, log\,(b) = a\, log\left(-\frac{1}{\eta}\right) = -a\, log\,(-\eta)$.

Função geradora dos momentos

$$M_X(u) = \frac{\exp\left[\mathcal{A}\left(\eta + \mathrm{u}\right)\right]}{\exp\left[\mathcal{A}\left(\eta\right)\right]} = \frac{\exp\left[-a\, log\,(-(\eta+u))\right]}{\exp\left[-a\, log\,(-\eta)\right]} = \frac{\exp\left[log\,(-\eta-u)^{-a}\right]}{\exp\left[log\,(-\eta)^{-a}\right]} = \frac{(-\eta-u)^{-a}}{(-\eta)^{-a}} =$$

$$= \left(\frac{-\eta-u}{-\eta}\right)^{-a} = \left(\cancelto{1}{\frac{-\eta}{-\eta}} + \left(\frac{1}{-\eta}\right)(-u)\right)^{-a} = (1 + b(-u))^{-a} = (1-bu)^{-a} = \left(\frac{1}{1-bu}\right)^{a}, \; bu \neq 1$$

Função geradora de comulantes

$$K_X(u) = log\,(M_X(u)) = log\,(1-bu)^{-a} = -a\, log\,(1-bu)\,, \quad bu > 1$$

Média

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \left.\frac{\partial}{\partial u} K_X(u)\right|_{u=0} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial u}\left[-a\, log\,(1-bu)\right]\right|_{u=0} \\
&= \left.\frac{-a(-b)}{1-bu}\right|_{u=0} \\
&= \frac{ab}{1 - \cancelto{0}{b\cdot 0}} \\
&= ab
\end{aligned}
$$

Segundo momento centrado

$$\mu_2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} K_X(u)\bigg|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial u}K_X(u)\right)\bigg|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{ab}{1-bu}\right)\bigg|_{u=0} = ab\frac{\partial}{\partial u}\left(1-bu\right)^{-1}\bigg|_{u=0} =$$

$$= ab(-1)\left(1-bu\right)^{-2}(-b)\Big|_{u=0} = ab^2\left(1-bu\right)^{-2}\Big|_{u=0} = ab^2\cancelto{1}{(1-b\cdot 0)^{-2}}$$

$$= ab^2$$

Terceiro momento centrado

$$\mu_3 = \frac{\partial^3}{\partial u^3} K_X(u)\bigg|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_X(u)\right)\bigg|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left[ab^2\left(1-bu\right)^{-2}\right]\bigg|_{u=0} = -2ab^2\left(1-bu\right)^{-3}(-b)\Big|_{u=0} =$$

$$= 2ab^3\left(1-bu\right)^{-3}\Big|_{u=0} = 2ab^3\cancelto{1}{(1-b\cdot 0)^{-3}}$$

$$= 2ab^3$$

Quarto momento centrado

$$\mu_4 = \kappa_4 + 3\mu_2^2 = \frac{\partial^4}{\partial u^4} K_X(u)\bigg|_{u=0} + 3\mu_2^2 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^3}{\partial u^3}K_X(u)\right)\bigg|_{u=0} + 3\mu_2^2 = \frac{\partial}{\partial u}\left[2ab^3\left(1-bu\right)^{-3}\right]\bigg|_{u=0} + 3\mu_2^2 =$$

$$= 2ab^3(-3)\left(1-bu\right)^{-4}(-b)\Big|_{u=0} + 3\mu_2^2 = 2ab^3(3b)\cancelto{1}{(1-b.0)^{-4}} + 3\mu_2^2 = 6ab^4 + 3\left[ab^2\right]^2 =$$

$$= 6ab^4 + 3a^2b^4$$

$$= \left(6a + 3a^2\right)b^4$$

11) Considere a distribuição de série de potências com função de probabilidade

$$f_\theta(x) = p_\theta(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)},\ x = 0, 1, 2, \ldots; a(x) > 0; \theta > 0 \tag{4}$$

a) Mostre que a distribuição (a faz parte da famíia exponencial (eq: 3) unidimensional.

Resolução

$$\begin{aligned}
f_\theta(x) &= \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)},\ x = 0, 1, 2, \ldots; a(x) \geq 0; \theta > 0 \\
&= a(x)\exp\left[log\left(\frac{\theta^x}{C(\theta)}\right)\right], \quad \frac{\theta^x}{C(\theta)} > 0,\ C(\theta) \neq 0 \\
&= a(x)\exp\left[log\left(\theta^x\right) - log\left(C(\theta)\right]\right., \quad \theta^x > 0,\ C(\theta) > 0 \\
&= a(x)\exp\left[x\,log\left(\theta\right) - log\left(C(\theta)\right]\right., \quad \theta > 0,\ C(\theta) > 0
\end{aligned}$$

Logo, $f_\theta(x)$ pertence a família exponencial (eq:3) unidimensional (s=1), onde, $T(x) = x$, $h(x) = a(x)$, $\eta = log(\theta)$, e, $\mathcal{A}(\eta) = log(C(\theta))$

b) Mostre que sua função geradora de momentos é $M_X(u) = \frac{C(\theta e^u)}{C(\theta)}$

Resolução

$$\eta = log(\theta) \Leftrightarrow e^\eta = \theta, \quad \theta > 0$$

$$\mathcal{A}(\eta) = log(C(\theta)) \Leftrightarrow \mathcal{A}(\eta) = log(C(e^\eta)), \quad C(e^\eta) > 0,\ C(\theta) > 0$$

$$\begin{aligned}
M_X(u) &= \frac{e^{\mathcal{A}(\eta+u)}}{e^{\mathcal{A}(\eta)}} \\
&= \frac{e^{log\left[C(e^{\eta+u})\right]}}{e^{log\left[C(e^\eta)\right]}} \\
&= \frac{C(e^{\eta+u})}{C(e^\eta)} \\
&= \frac{C(e^\eta \cdot e^u)}{C(e^\eta)} \\
&= \frac{C(\theta e^u)}{C(\theta)}
\end{aligned}$$

c) Mostre que as distribuições binomial, binomial negativa e Poisson são casos especiais da distribuição de série de potências e determine $a(x)$ e $C(\theta)$.

Resolução

c.1) Distribuição binomial

Se $X \sim Bin(p, n), \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n,$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \le p \le 1,\, n \in \mathcal{N} \\
&= \binom{n}{x} \exp\{log\left[p^x(1-p)^{n-x}\right]\}, \quad p^x(1-p)^{n-x} > 0 \\
&= \binom{n}{x} \exp\{log\,(p^x) + log\left[(1-p)^{n-x}\right]\}, \quad p^x > 0,\, (1-p)^{n-x} > 0 \\
&= \binom{n}{x} \exp\{x\, log\,(p) + (n-x)\, log\,(1-p)\}, \quad p > 0,\, 1-p > 0 \\
&= \binom{n}{x} \exp\{x\, log\,(p) + n\, log\,(1-p) - x\, log\,(1-p)\}, \quad p > 0,\, 1-p > 0 \\
&= \binom{n}{x} \exp\{x\, [log\,(p) - log\,(1-p)] + n\, log\,(1-p)\} \\
&= \binom{n}{x} \exp\{x\, log\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\, log\,(1-p)\}, \quad \frac{p}{1-p} > 0,\, 1-p \ne 0
\end{aligned}$$

$T(x) = x,\, h(x) = a(x) = \binom{n}{x},\, \eta = log(\theta) = log\left(\frac{p}{1-p}\right)$, e ,

$\mathcal{A}(\eta) = log\,[C(\theta)] = -n\, log\,(1-p) = log\left[(1-p)^{-n}\right], \quad (1-p)^{-n} > 0$

$C(\theta) = (1-p)^{-n} = \left(\frac{1}{1-p}\right)^n, \quad 1-p \ne 0$

c.2) Distribuição binomal negativa

Se $X \sim BN(p, m), \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad 0 \le p \le 1,$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \binom{m+x-1}{m-1} p^m (1-p)^x, \quad m \ge 1,\, 0 \le p \le 1 \\
&= \binom{m+x-1}{m-1} \exp\{log\,[p^m(1-p)^x]\}, \quad p^m(1-p)^x > 0 \\
&= \binom{m+x-1}{m-1} \exp\{log\,(p^m) + log\,[(1-p)^x]\}, \quad p^m > 0,\, (1-p)^x > 0 \\
&= \binom{m+x-1}{m-1} \exp\{x\, log(1-p) + log\,(p^m)\}, \quad p^m > 0,\, (1-p) > 0
\end{aligned}$$

$T(x) = x,\, h(x) = a(x) = \binom{m+x-1}{m-1},\, \eta = log(\theta) = log\,(1-p)$, e ,

$\mathcal{A}(\eta) = log\,[C(\theta)] = -\,log\,(p^m) = log\,(p^{-m})$,

$C(\theta) = p^{-m} = \left(\frac{1}{p}\right)^m, \quad p \ne 0$

c.3) Distribuição Poisson

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad \lambda > 0,$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{x!} \lambda^x exp\{-\lambda\} \\
&= \frac{1}{x!} \exp\{log\,(\lambda^x)\} exp\{-\lambda\}, \quad \lambda^x > 0 \\
&= \frac{1}{x!} \exp\{log\,(\lambda^x) - \lambda\} \\
&= \frac{1}{x!} \exp\{x\, log\,(\lambda) - log\,(exp\{\lambda\})\}, \quad \lambda > 0,\, exp\{\lambda\} > 0
\end{aligned}$$

$T(x) = x$, $h(x) = a(x) = \frac{1}{x!}$, $\eta = log(\theta) = log\,(\lambda)$, e ,
$\mathcal{A}(\eta) = log\,[C(\theta)] = \ log\,(exp\{\lambda\})$
$C(\theta) = exp\{\lambda\}$

13) Seja $T(X) = (T_1(X), \ldots, T_s(X))'$ e considere a densidade (3)

13.1) Mostre para $s = 1$ que $\mathbb{E}_\theta[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}$ e $\text{Var}_\theta[T(X)] = \frac{B''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2} - \frac{\eta''(\theta)B'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^3}$.

Resolução

$\mathbb{E}_\theta[T(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\right]h(x)dx$

A densidade (3), é de dimensão s, se $s = 1$, esta, pode ser rescrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\right] \cdot h(x) \\
&= \exp\left[\eta\, T(x) - \mathcal{A}(\eta)\right] \cdot h(x), \quad \text{para}, \eta(\theta) = \eta \text{ e } B(\theta) = \mathcal{A}(\eta) = \mathcal{A}(\eta(\theta)) \\
p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x) - \mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot h(x) \\
p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] \cdot \exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot h(x) \\
p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x) - \mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot h(x) \\
\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] \cdot \exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot h(x) \cdot \exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \\
\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] \cdot \exp\left[\cancel{-\mathcal{A}(\eta(\theta))} + \cancel{\mathcal{A}(\eta(\theta))}\right] \cdot h(x) \\
\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot p_\theta(x) &= \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] \cdot h(x), \quad \exp\left[0\right] = 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \cdot p_\theta(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] \cdot h(x)dx \\
\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx, \ \text{integrando em } x \ \exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \ \text{ é constante} \\
\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx, \ p_\theta \text{ é fdp}^{1}, \text{ logo}, \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)dx = 1, \qquad (**) \\
log\left[\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\right] &= log\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx\right] \\
\mathcal{A}(\eta(\theta)) &= log\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx\right] \\
\frac{\partial \mathcal{A}(\eta(\theta))}{\partial\, \eta(\theta)} &= \frac{\partial}{\partial \eta(\theta)} log\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx\right] \\
\frac{\partial \mathcal{A}(\eta(\theta))}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \eta(\theta)} &= \frac{\frac{\partial}{\partial \eta(\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx}, \ \text{deriv. em } \eta(\theta), \text{ o que não é } \eta(.), \text{ é constante} \\
\frac{\frac{\partial \mathcal{A}(\eta(\theta))}{\partial \theta}}{\frac{\partial \eta(\theta)}{\partial \theta}} &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx}{\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]}, \ \text{expressão } (**) \\
\frac{\frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta}}{\frac{\partial \eta(\theta)}{\partial \theta}} &= \exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx, \ \mathcal{A}(\eta(\theta)) = B(\theta), \ \left(e^{\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]}\right)^{-1} = e^{\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]} \\
\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right] h(x)dx, \quad \text{integ.em } x, \exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right] \text{ é constante} \\
\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - \mathcal{A}(\eta(\theta))\right] h(x)dx \\
\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\right] h(x)dx, \quad \text{pois}, \mathcal{A}(\eta(\theta)) = B(\theta) \\
\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} &= \mathbb{E}_\theta\left[T(x)\right]
\end{aligned}$$

13.2) $\mathrm{Var}_\theta[T(X)] = \frac{B''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2} - \frac{\eta''(\theta)B'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^3}$.

$$Var_\theta\left[T(x)\right] = \mathbb{E}_\theta\left[T(x)\right]^2 - \mathbb{E}^2_\theta\left[T(x)\right] \text{ e } \mathbb{E}_\theta\left[T(x)\right] = \frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\right]h(x)dx, \quad (p.1)$$

$$\mathbb{E}^2_\theta\left[T(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\right]h(x)dx, \quad (p.2)$$

$$\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} = \frac{\frac{\partial\mathcal{A}(\eta(\theta))}{\partial\theta}}{\frac{\partial\eta(\theta)}{\partial\theta}} = \frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - \mathcal{A}(\eta(\theta))\right]h(x)dx$$

$$\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]\exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]h(x)dx$$

$$\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]\exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]h(x)dx$$

$$\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]\exp\left[\cancel{-\mathcal{A}(\eta(\theta))} + \cancel{\mathcal{A}(\eta(\theta))}\right]h(x)dx$$

$$\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx, \qquad (***)$$

$$log\left[\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right] = log\left[\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx\right]$$

$$log\left(exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\right) + log\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right] = log\left[\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\mathcal{A}(\eta(\theta)) + log\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]\right] = \frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}log\left[\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\mathcal{A}(\eta(\theta)) + \frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}log\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right] = \frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx}$$

$$\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} + \frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]}{\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)T(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx}{\exp\left[\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}}, \quad \text{ver 13.1) e } (***)$$

$$\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} + \frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]}{\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}}\right] = \exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx$$

$$\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)} + \frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]}{\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}}\right] = \exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx$$

$$\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]^2 + \cancel{\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]}{\cancel{\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}}}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x)\exp\left[-\mathcal{A}(\eta(\theta))\right]\exp\left[\eta(\theta)T(x)\right]h(x)dx$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x)\exp\left[\eta(\theta)T(x) - \mathcal{A}(\eta(\theta))\right]h(x)dx - \left[\frac{\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\eta'(\theta)}\right]^2$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\mathcal{A}'(\eta(\theta))\right]\cdot\eta'(\theta) - \frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\eta'(\theta)\right]\cdot\mathcal{A}'(\eta(\theta))}{\left[\eta'(\theta)\right]^2} = \mathbb{E}^2_\theta\left[T(x)\right] - \left[\mathbb{E}_\theta\left[T(x)\right]\right]^2, \quad \text{(p.1) e (p.2)}$$

Continuação do exercício 13.2)

$$\frac{\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\mathcal{A}^{'}(\eta(\theta))\right]\cdot\eta^{'}(\theta)-\frac{\partial}{\partial\eta(\theta)}\left[\eta^{'}(\theta)\right]\cdot\mathcal{A}^{'}(\eta(\theta))}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2},\quad \text{(p.1) e (p.2)}$$

$$\frac{\left[\frac{\partial\mathcal{A}^{'}(\eta(\theta))}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta(\theta)}\right]\cdot\eta^{'}(\theta)-\left[\frac{\partial\eta^{'}(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\,\eta(\theta)}\right]\cdot\mathcal{A}^{'}(\eta(\theta))}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2}$$

$$\frac{\left[\frac{\partial B^{'}(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\,\eta(\theta)}\right]\cdot\eta^{'}(\theta)-\left[\frac{\partial\,\eta^{'}(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta(\theta)}\right]\cdot B^{'}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2},\quad \mathcal{A}^{'}(\eta(\theta))=B^{'}(\theta)$$

$$\frac{\left[\frac{\frac{\partial B^{'}(\theta)}{\partial\theta}}{\frac{\partial\eta(\theta)}{\partial\,\theta}}\right]\cdot\eta^{'}(\theta)-\left[\frac{\frac{\partial\,\eta^{'}(\theta)}{\partial\theta}}{\frac{\partial\eta(\theta)}{\partial\theta}}\right]\cdot B^{'}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2}$$

$$\frac{\left[\frac{B^{''}(\theta)}{\cancel{\eta^{'}(\theta)}}\right]\cdot\cancel{\eta^{'}(\theta)}-\left[\frac{\eta^{''}(\theta)}{\eta^{'}(\theta)}\right]\cdot B^{'}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2}$$

$$\frac{B^{''}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}-\frac{\frac{\eta^{''}(\theta)\cdot B^{'}(\theta)}{\eta^{'}(\theta)}}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2}$$

$$\frac{B^{''}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}-\frac{\eta^{''}(\theta)\cdot B^{'}(\theta)}{\eta^{'}(\theta)}\frac{1}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}=\mathbb{E}_{\theta}^{2}\left[T(x)\right]-\left[\mathbb{E}_{\theta}\left[T(x)\right]\right]^{2}$$

$$\frac{B^{''}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{2}}-\frac{\eta^{''}(\theta)\cdot B^{'}(\theta)}{\left[\eta^{'}(\theta)\right]^{3}}=Var_{\theta}\left[T(x)\right],\quad (p.1)$$

15) Seja T uma variável aleatória com momentos centrais (finitos) $\mu_j=\mu_j(T)=E[(T-E(T))^j]$, $j=2,3,...$, e cumulantes $\kappa_j=\kappa_j(T)$, $j=1,2,3,...$ e seja a uma constante não nula. Mostre que
i) Se $T\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\kappa_1(T)=\mu$, $\kappa_2(T)=\sigma^2$, $\kappa_j(T)=0$, para $j=3,4,\ldots$, $skew(T)=0$ e $kurt(T)=3$.

Sabemos que $M_T(u)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j u^j}{j!}$ e $K_T(u)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\kappa_j u^j}{j!}=logM_T(u)$. Fazendo $\kappa_0=0$, temos que $\kappa_1=E(T)$, $\kappa_2=\mu_2=Var(T)$, $\kappa_3=\mu_3$ e $\kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$. Desse modo,

$$skew(T)=\frac{\mu_3(T)}{\mu_2(T)^{3/2}}=\frac{\kappa_3(T)}{\kappa_2(T)^{3/2}}$$

e

$$kurt(T)=\frac{\mu_4(T)}{\mu_2(T)^2}=\frac{\kappa_4(T)+3\mu_2(T)^2}{\mu_2(T)^2}=\frac{\kappa_4(T)}{\mu_2(T)^2}+3=\frac{\kappa_4(T)}{\kappa_2(T)^2}+3.$$

Assim, se $T\sim N(\mu,\sigma^2)$, então $\kappa_1(T)=E[T]=\mu$ e $\kappa_2(T)=\mu_2(T)=Var(T)=\sigma^2$. Assim,

$$skew(T)=\frac{\kappa_3(T)}{(\sigma^2)^{3/2}}=\frac{\kappa_3(T)}{\sigma^3}=0,\quad \text{para } \kappa_3(T)=0$$

e

$$kurt(T)=\frac{\kappa_4(T)}{(\sigma^2)^2}+3=\frac{\kappa_4(T)}{\sigma^4}=3,\quad \text{para } \kappa_4(T)=0.$$

24 Enuncie e prove resultados semelhantes aos do exercício 23 da lista 1 ano 2024 para famílias de localização e de escala.

Resolução

24.1 Família localização

Suponha que $X_1, \dots, X_n$ sejam uma amostras aleatória de uma família de localização com função distribuição $F(x-\alpha), \alpha \in \mathcal{R}$. Se $Y_j = \phi_j(X)$, para $j = 1, 2, 3, \dots n$, são funções do vetor aleatório $X = X_1, \dots, X_n$, invariantes por localização, isto é,

$$\phi_j(x_1, \dots, x_n) = \phi_j[(x_1 - \alpha), (x_2 - \alpha), (x_3 - \alpha), \dots, (x_n - \alpha)], \quad \alpha \in \mathcal{R},$$

o vetor $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ é uma estatística ancilar.

Prova

Se $X = X_1, \dots, X_n$ pertence a família de localização, então existe uma variável aleatória U que não depende de nenhum parâmetro e, com função distribuição conhecida, tal que:

$$X = \alpha + U \Leftrightarrow X - \alpha = U, \quad \alpha \in \mathcal{R}$$

$$P(X \leq x) = P(\alpha + U \leq x) = P(U \leq x - a) = F(x - a)$$

Como $Y_j = \phi_j(X)$ e $\phi_j(x_1, \dots, x_n) = \phi_j[(x_1-\alpha), (x_2-\alpha), (x_3-\alpha), \dots, (x_n-\alpha)]$, $j = 1, 2, 3, \dots n$, tem-se que:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \phi_1[(x_1 - \alpha), (x_2 - \alpha), (x_3 - \alpha), \dots, (x_n - \alpha)] \\ Y_2 &= \phi_2[(x_1 - \alpha), (x_2 - \alpha), (x_3 - \alpha), \dots, (x_n - \alpha)] \\ &\vdots \\ Y_n &= \phi_n[(x_1 - \alpha), (x_2 - \alpha), (x_3 - \alpha), \dots, (x_n - \alpha)] \end{aligned}$$

Uma estatística $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ qualquer, é ancilar se sua distribuição conjunta não depende de parâmetro, ou seja, $P(Y \leq y) = F(y)$ não depende de parâmetro.

$P(Y \leq y) = P(Y_1, \dots, Y_n \leq y)$

$P(Y \leq y) = P(Y_1 \leq y, \dots, Y_n \leq y)$

$P(Y \leq y) = P(\phi_1[(x_1 - \alpha), \dots, (x_n - \alpha)] \leq y, \dots, \phi_n[(x_1 - \alpha), \dots, (x_n - \alpha)] \leq y)$

$P(Y \leq y) = P(\phi_1[(u_1 + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha}), \dots, (u_n + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha})] \leq y, \dots, \phi_n[(u_1 + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha}), \dots, (u_n + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha})] \leq y),$

$x_i = \alpha + u_i$, $\alpha \in \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, n$, por definição da família de localização

$P(Y \leq y) = P(\phi_1[(u_1), \dots, (u_n)] \leq y, \dots, \phi_n[(u_1), \dots, (u_n)] \leq y)$, $u_i = x_i - \alpha$, $i = 1, \dots, n, \alpha \in \mathcal{R}$

$P(Y \leq y) = P(\phi_1(U) \leq y, \dots, \phi_n(U) \leq y), \quad U = \{(u_1), \dots, (u_n)\}$

(1) $\phi_i(U)$ é função de U e, U é um vetor de variáveis aleatória que seguem uma distribuição de probabilidade (conhecida) que não depende de parâmetro. (2) Como a distribuição de U não depende de nenhum parâmetro, ϕ_i também não dependerá de parâmetro. Como consequência de (1) e (2), $P(Y \leq y) = P(\phi_1(U) \leq y, \dots, \phi_n(U) \leq y)$ também não depende de parâmetro. Logo, o vetor $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ é uma estatística ancilar.

24.2 Família escala

Suponha que $X_1,\ldots,X_n$ sejam uma amostras aleatória de uma família de escala com função distribuição $F(\frac{x}{b}), b>0$. Se $Y_j=\phi_j(X)$, para $j=1,2,3,\ldots n$, são funções do vetor aleatório $X=X_1,\ldots,X_n$, invariantes por escala, isto é, $\phi_j(x_1,\ldots,x_n)=\phi_j[(\frac{x_1}{b}),(\frac{x_2}{b}),(\frac{x_3}{b}),\ldots,(\frac{x_n}{b})]$, $b>0$, o vetor $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$ é uma estatística ancilar.

Prova

Se $X=X_1,\ldots,X_n$ pertence a família de escala, então existe uma variável aleatória U que não depende de nenhum parâmetro e, com função distribuição conhecida, tal que:

$$X=bU \Leftrightarrow \frac{X}{b}=U, \quad b>0$$

$$P(X\le x)=P(bU\le x)=P(U\le \frac{x}{b})=F(\frac{x}{b})$$

Como $Y_j=\phi_j(X),$ e $\phi_j(x_1,\ldots,x_n)=\phi_j[(\frac{x_1}{b}),(\frac{x_2}{b}),(\frac{x_3}{b}),\ldots,(\frac{x_n}{b})]$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \phi_1\left[\left(\frac{x_1}{b}\right),\left(\frac{x_2}{b}\right),\left(\frac{x_3}{b}\right),\ldots,\left(\frac{x_n}{b}\right)\right]\\
&\vdots\\
Y_n &= \phi_n\left[\left(\frac{x_1}{b}\right),\left(\frac{x_2}{b}\right),\left(\frac{x_3}{b}\right),\ldots,\left(\frac{x_n}{b}\right)\right]
\end{aligned}$$

Uma estatística $Y=\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\}$ qualquer, é ancilar se sua distribuição conjunta não depende de parâmetro, ou seja, $P(Y\le y)=F(y)$ não depende de parâmetro.

$$\begin{aligned}
&P(Y\le y)=P(Y_1,\ldots,Y_n\le y)\\
&P(Y\le y)=P(Y_1\le y,\ldots,Y_n\le y)\\
&P(Y\le y)=P\left(\phi_1\left[\left(\frac{x_1}{b}\right),\ldots,\left(\frac{x_n}{b}\right)\right]\le y,\ldots,\phi_n\left[\left(\frac{x_1}{b}\right),\ldots,\left(\frac{x_n}{b}\right)\right]\le y\right)\\
&P(Y\le y)=P\left(\phi_1\left[\left(\frac{\cancel{b}u_1}{\cancel{b}}\right),\ldots,\left(\frac{\cancel{b}u_n}{\cancel{b}}\right)\right]\le y,\ldots,\phi_n\left[\left(\frac{\cancel{b}u_1}{\cancel{b}}\right),\ldots,\left(\frac{\cancel{b}u_n}{\cancel{b}}\right)\right]\le y\right),\ bu_i=x_i, i=1,\ldots,n, b>0\\
&P(Y\le y)=P(\phi_1[(u_1),\ldots,(u_n)]\le y,\ldots,\phi_n[(u_1),\ldots,(u_n)]\le y),\ u_i=\frac{x_i}{b}, i=1,\ldots,n,b>0\\
&P(Y\le y)=P(\phi_1(U)\le y,\ldots,\phi_n(U)\le y),\quad U=\{(u_1),\ldots,(u_n)\},\quad u_i=\frac{x_i}{b}, i=1,\ldots,n,b>0
\end{aligned}$$

(1) $\phi_i(U)$ é função de U e, U é um vetor de variáveis aleatória que seguem uma distribuição de probabilidade (conhecida) que não depende de parâmetro. (2) Como a distribuição de U não depende de nenhum parâmetro, ϕ_i também não dependerá de parâmetro. Como consequência de (1) e (2), $P(Y\le y)=P(\phi_1(U)\le y,\ldots,\phi_n(U)\le y)$ também não depende de parâmetro. Logo, o vetor $Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ é uma estatística ancilar.

26) Seja $f:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$ uma função integrável. Seja $c(\theta)=1/\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$. Sejam $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória da densidade $p_\theta(x)=c(\theta)f(x)$, para $x>\theta$, e $p_\theta(x)=0$, caso contrário. Mostre que $X_{(1)}=\min(X_1,\ldots,X_n)$ é uma estatística suficiente minimal.

Sejam $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. de densidade

$$p_\theta(x)=\begin{cases} c(\theta)f(x), & x\ge\theta\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
p_\theta(x) &= \prod_{i=1}^{n} c(\theta) f(x_i) I(x_i \geq \theta) \\
&= c(\theta)^n \prod_{i=1}^{n} f(x_i) I(x_i \geq \theta) \\
&= c(\theta)^n \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i=1}^{n} I(x_i \geq \theta) \\
&= c(\theta)^n I_{\{\min(X_1,\dots,X_n) \geq \theta\}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&= \underbrace{c(\theta)^n I_{\{X_{(1)} \geq \theta\}}}_{g_\theta(T(x))} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)}_{h(x)}
\end{aligned}
$$

Pelo teorema da fatoração temos que $T(x) = X_{(1)}$ é estatística suficiente para θ.
Temos que mostrar que $T(x)$ é estatística suficiente minimal.
Sejam $x, y \in \mathcal{X}$, $T(x) = T(y) \Leftrightarrow y \in D(x)$ onde,

$$
\begin{aligned}
D(x) = \{&y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{X} : y_i > 0, \forall i = 1, \dots, n \\
&\text{e } P_\theta(y) = P_\theta(x) \cdot h(x, y), \forall \theta > 0 \text{ e } h(x, y) \geq 0\} \text{ (Teorema - Schervish).}
\end{aligned}
$$

- $(\Rightarrow)$

$$
\begin{aligned}
T(y) = T(x) &\Rightarrow Y_{(1)} = X_{(1)}, \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow p_\theta(y) = c(\theta)^n I_{\{Y_{(1)} \geq \theta\}} \prod_{i=1}^{n} f(y_i) = c(\theta)^n I_{\{X_{(1)} \geq \theta\}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i) h(x, y) \\
&\Rightarrow p_\theta(y) = p_\theta(x) h(x, y), \forall \theta > 0, h(x, y) = 1 \\
&\Rightarrow \mathbf{y} \in D(x)
\end{aligned}
$$

- $(\Leftarrow)$

$$
\begin{aligned}
y \in D(x) &\Rightarrow p_\theta(y) = p_\theta(x).1 \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow c(\theta)^n I_{\{Y_{(1)} \geq \theta\}} \prod_{i=1}^{n} f(y_i) = c(\theta)^n I_{\{X_{(1)} \geq \theta\}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \quad (*)
\end{aligned}
$$

A única forma de verificar a igualdade (*) é se os termos semelhantes forem iguais.

Assim, $c(\theta)^n = c(\theta)^n$, $\prod_{i=1}^{n} f(y_i) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ e $I_{\{Y_{(1)} \geq \theta\}} = I_{\{X_{(1)} \geq \theta\}}$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow I_{\{Y_{(1)} \geq \theta\}} = I_{\{X_{(1)} \geq \theta\}} \frac{\cancel{c(\theta)^n} \cancel{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)}}{\cancel{c(\theta)^n} \cancel{\prod_{i=1}^{n} f(y_i)}} \\
&\Rightarrow I_{\{Y_{(1)} \geq \theta\}} = I_{\{X_{(1)} \geq \theta\}} \\
&\qquad T(x) = T(y)
\end{aligned}
$$

Logo, $T(X) = X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ é uma estatística suficiente minimal.

27) Sejam $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ variáveis aleatórias bidimensionais i.i.d. com densidade $f_\theta(x, y) = 2/\theta^2$, para $x > 0$, $y > 0$, $x + y < \theta$, e $f_\theta(x, y) = 0$, caso contrário.

a) Encontre uma estatística suficiente minimal para θ.

Temos a densidade para $f_\theta(x,y)$:

$$f_\theta(x,y) = \frac{2}{\theta^2} I_{\{x>0,y>0,x+y<\theta\}}$$
$$f_\theta(x,y) = \frac{2}{\theta^2} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y) I_{(0,\theta)}(x+y)$$

Sejam $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ variáveis aleatórias i.i.d. então a densidade conjunta é

$$\begin{aligned}
p_\theta(x,y) &= \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i,y_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{\theta^2} I_{(0,\infty)}(x_i) I_{(0,\infty)}(x_i) I_{(0,\theta)}(x_i+y_i) \\
&= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i+y_i) I_{(0,\infty)}(x_i) I_{(0,\infty)}(y_i) \\
&= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n I_{(0,\theta)}(\max(X_1+Y_1,\ldots,X_n+Y_n)) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) I_{(0,\infty)}(y_i) \\
&= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n I_{(0,\theta)}\left([X+Y]_{(n)}\right) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) I_{(0,\infty)}(y_i) \\
&= \underbrace{\frac{2^n}{\theta^{2n}} I_{(0,\theta)}\left([X+Y]_{(n)}\right)}_{g_\theta(T(x,y))} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i)}_{\text{h}(x,y)} \\
&= \underbrace{g_\theta\left([X+Y]_{(n)}\right)}_{\text{função de } \theta} \cdot \underbrace{h(x,y)}_{\text{função de } x \text{ e } y}
\end{aligned}$$

Pelo teorema da fatoração, temos que $T(x,y) = [X+Y]_{(n)} = \max(X_1+Y_1,\ldots,X_n+Y_n)$ é uma estatística suficiente para θ.

Temos que mostrar que $T(x,y)$ é estatística suficiente minimal.

Sejam $(x,y),(x',y') \in \mathcal{X}$, $T(x',y') = T(x,y) \Leftrightarrow (x',y') \in D(x,y)$ onde

$$\begin{aligned}
D(x,y) = &\{(x_1',y_1'),\ldots,(x_n',y_n')\} \in \mathcal{X} \,:\, p_\theta(x',y') = p_\theta(x,y)\cdot h\left((x,y),\left(x',y'\right)\right),\ \forall\theta>0\} \\
&\text{e } h\left((x,y),\left(x',y'\right)\right) \geq 0,\ \text{(Teorema - Schervish)}
\end{aligned}$$

- $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned}
T(x',y') = T(x,y) &\Rightarrow (X'+Y')_{(n)} = (X+Y)_{(n)} \forall\theta>0 \\
&\Rightarrow p_\theta(x',y') = \frac{2^n}{\theta^{2n}} I_{(0,\theta)}\left([X'+Y']_{(n)}\right) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i') \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i') \\
&= \frac{2^n}{\theta^{2n}} I_{(0,\theta)}\left([X+Y]_{(n)}\right) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i) h\left((x,y),(x',y')\right) \\
&\Rightarrow p_\theta(x',y') = p_\theta(x,y)\cdot h\left((x,y),(x',y')\right),\ \forall\theta>0, h\left((x,y),(x',y')\right) = 1 \\
&\Rightarrow (\mathbf{x}',\mathbf{y}') \in D(x,y)
\end{aligned}$$

- $(\Leftarrow)$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in D(x,y) &\Rightarrow p_\theta(x',y') = p_\theta(x,y) \cdot h\left((x,y),(x',y')\right) \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{\theta}^{2n}} I_{(0,\theta)}((X'+Y')_{(n)}) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i') \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i') \\
&= \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{\theta}^{2n}} I_{(0,\theta)}((X+Y)_{(n)}) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i) \cdot 1 \\
& I_{(0,\theta)}((X'+Y')_{(n)}) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i') \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i') = I_{(0,\theta)}((X+Y)_{(n)}) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i) \\
& \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i') \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i') = \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(y_i) \\ I_{(0,\theta)}((X'+Y')_{(n)}) = I_{(0,\theta)}((X+Y)_{(n)}) \end{cases} \quad , \quad \text{por semelhança .} \\
& T(x',y') = T(x,y)
\end{aligned}
$$

Assim $T(x,y) = [X+Y]_{(n)}$ é uma estatística suficiente minimal.

b) Encontre a distribuição da estatística suficiente minimal obtida em (a).

Temos que $T(x,y) = \max\left(X_1+Y_1,\ldots,X_n+Y_n\right)$, onde $\left(X_1,Y_1\right),\ldots,\left(X_n,Y_n\right)$ são variáveis aleatórias iid com densidade

$$
f_\theta(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}, x>0, y>0, x+y<\theta \\ 0, c \cdot c \end{cases}
$$

A função de distribuição acumulada é

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathbb{P}(T \le t) \\
F_T(t) &= \mathbb{P}\left(\max\left(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n\right) \le t\right) \\
F_T(t) &= \mathbb{P}\left(x_1+y_1 \le t,\ldots,x_n+y_n \le t\right) \\
F_T(t) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(x_i+y_i \le t\right)
\end{aligned}
$$

Agora a $\mathbb{P}\left(x_i+y_i \le t\right) = \int\int \frac{2}{\theta^2} dydx$. Então a integral avalia a área da região definida para x e y como segue. $x+y \leqslant t \Rightarrow y = t-x, x>0, y>0$. Então $0 \leqslant x \leqslant t, 0 \le y \le t-x$ e $x+y \le t$, no intervalo $t \le \theta$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(x_i+y_i \le t\right) &= \frac{2}{\theta^2}\int_0^t \int_0^{t-x} dydx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^t y\Big|_0^{t-x} dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^t (t-x)dx \\
&= \frac{2}{\theta^2}\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^t = \frac{2}{\theta^2}\left(t^2 - \frac{t^2}{2}\right) = \frac{t^2}{\theta^2} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^2, \text{ para } t \le \theta.
\end{aligned}
$$

Então a função acumulada é

$$
F_1(t) = \prod_{i \to 1}^{n} \left(\frac{t}{\theta}\right)^2 = \left[\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n}, \text{ para } t \le \theta
$$

E a função de densidade serão

$$
f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n} = \frac{2n}{\theta^{2n}} \cdot t^{2n-1}, \text{ para } 0 < t < \theta.
$$

32 Estatística suficiente completa se o espaço paramétrico é Ω, mas apenas suficiente (e não completa) se o espaço paramétrico é $\Omega_0 \subset \Omega$. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (com $n \ge 2$) variáveis aleatórias independentes com distribuição $U(0,\theta)$, onde $\theta \in \Omega = (0,+\infty)$. Sabemos que $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa para θ quando o espaço paramétrico é Ω. Considere agora que o espaço paramétrico é $\Omega_0 = [1,+\infty)$. Mostre que $X_{(n)}$ é suficiente, mas não é completa para θ em Ω_0.

Resolução

Suficiência

Uma estatística $T(x)$ é suficiente para um θ, se contém toda informação do parâmetro e a distribuição de X dado $T(x)$ não depende do parâmetro θ.

Critério de Fatoração (C.F): A condição necessária e suficiente para $T(x)$ ser suficiente para o parâmetro θ é que existam funções $g_\theta[T(x)] \geq 0$ e $h(x) \geq 0$, tal que: $p_\theta(x) = g_\theta[T(x)]h(x)$.

Por definição, se $X \sim U(a,b)$, tem-se: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & c.c \end{cases}$. Como, $a = 0$ e $b = \theta$, tem-se:

$$f(X = x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta\,, \theta \in [1, +\infty) \\ 0, & c.c \end{cases}$$. Seja, $X = X_1, \ldots, X_n$, tomando a parte não nula,

$$f(X_1, \ldots, X_n; \theta) = f(X_1; \theta) \ldots f(X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X; \theta), \quad \text{porque } X \text{ são iid.}$$

$$f(X; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{\{0<x<\theta\}} = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}} \mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\theta\}}, \quad X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n), X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

$$f(X; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{\{0<x<\theta\}} = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}} \mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\theta\}}, \quad X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n), X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

$$f(X; \theta) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\theta\}}}_{g_\theta[T(x)]} \underbrace{\mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}}}_{h(x)}, \quad \theta \in [1; +\infty]$$

Como $g_\theta[T(x)] = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\theta\}} > 0$ e $h(x) = \mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}} > 0$, pelo C.F, $T(x) = X_{(n)}$, para $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$, é uma estatística suficiente.

Completividade

Seja $T(x)$ uma estatística suficiente para um parâmetro θ. T(x) é completa para θ se:

a) $E_\theta\left[g(T(x))\right] = 0, \forall \theta \in \Omega_0 \Rightarrow g\left[T(x)\right] = 0$

b) $P\left(\left[g(T(x))\right] = 0\right] = 1$

$$E_\theta\left[g(T(x))\right] = \int_{S(x)} g\left[T(x)\right] f_{T(x)}(x) = 0, \quad S(x) \text{ é suporte de x}$$

$$f_{T(x)}(x) = \frac{\partial F_{T(x)}(x)}{dx}, \qquad \text{por definição}$$

$$P(T(x) \leq x) = P(X_{(n)} \leq x),\ T(x) = X_{(n)}$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(\max(X_1, \ldots, X_n \leq x))$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x)$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x), \quad \text{prop. de independência}$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = F(x) \cdot \ldots \cdot F(x), \quad \text{porque } X \text{ são iid.}$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = [F(x)]^n$$

$$P(X_{(n)} \leq x) = F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n$$

$$F(x) = \int_0^x f(X; \theta) dx = \int_0^x \frac{1}{\theta} dx = \frac{x}{\theta}, \quad 0 < x < \theta,\ \theta \in [1, +\infty)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \left[\frac{x}{\theta}\right]^n, \quad 0 < x < \theta,\ \theta \in [1, +\infty)$$

$$f_{T(x)}(x) = f_{X_{(n)}}(x) = \frac{\partial F_{X_{(n)}}(x)}{dx} = \frac{\partial [F(x)]^n}{dx} = n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} F^{'}(x)$$

$$f_{T(x)}(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^{n-1}} f(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^{n-1}} \cdot \frac{1}{\theta}, \quad F^{'}(x) = f(x) \text{ por definição}$$

$$f_{T(x)}(x) = \frac{n \cdot x^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < x < \theta,\ \theta \in [1, +\infty)$$

$$E_\theta\left[g(T(x))\right] = \int_{S(x)} g\left[T(x)\right] f_{T(x)}(x)dx = 0, \quad S(x) = (0, \theta),\ \theta \in [1, +\infty)$$

$$E_\theta\left[g(T(x))\right] = \int_0^\theta g\left[T(x)\right] \frac{n \cdot x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx = 0, \quad (*)$$

$$\frac{\partial \int_{k(x)}^{p(x)} L(t)dt}{\partial x} = L\left[p(x)\right] \cdot p^{'}(x) - L[k(x)] \cdot k^{'}(x), \quad \textbf{teor. fund. de cálculo } (**)$$

$$\frac{\partial \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx}{\partial \theta} = \frac{\partial 0}{\partial \theta}, \quad \text{derivando ambos lados do } (*)$$

$$\frac{n \cdot \partial \theta^{-n}}{\partial \theta} \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx + \frac{\partial \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx}{\partial \theta} \cdot \frac{n}{\theta^n} = 0, \quad \text{derivada do produto}$$

$$-n^2 \cdot \theta^{-n-1} \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx + \underbrace{g\left(\theta\right) \theta^{n-1} \cdot \frac{n}{\theta^n}}_{\text{aplicando } (**)} = 0$$

$$g\left(\theta\right) \theta^{n-1} \cdot \frac{n}{\theta^n} - \frac{n^2}{\theta^{n+1}} \cdot \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx = 0$$

$$g\left(\theta\right) \theta^{n-1} \cdot \frac{n}{\theta^n} - \frac{n^2}{\theta^{n+1}} \cdot \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx = 0$$

$$g\left(\theta\right) \cdot \frac{n}{\theta} - \frac{n}{\theta} \cdot \underbrace{\frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta g\left[T(x)\right] x^{n-1} dx}_{E_\theta[g(T(x))]} = 0, \quad \text{ver } (*)$$

$$g\left(\theta\right) \cdot \frac{n}{\theta} - \frac{n}{\theta} \cdot E_\theta\left[g(T(x))\right] = 0$$

$$\frac{\cancel{n}}{\cancel{\theta}} \cdot E_\theta\left[g(T(x))\right] = \frac{\cancel{n}}{\cancel{\theta}} g\left(\theta\right)$$

$$E_\theta\left[g(T(x))\right] = g\left(\theta\right) \quad \text{a) sugere } E_\theta\left[g(T(x))\right] = 0, \text{o que remete a } g\left(\theta\right) = 0$$

$$E_\theta\left[g(T(x))\right] = 0,\ g\left(\theta\right) = 0,\ \forall \theta \in [1; +\infty)$$

O fato de $E_\theta\left[g(T(x))\right] = 0,\ \forall \theta \in [1; +\infty)$ e $g\left(\theta\right) = 0$, não garante que $g[T(x)]$ seja sempre nulo, quase certamente, conforme apresentado abaixo.

A função $g[(T(x)]$ é uma função genérica qualquer, escrita em função da estatística suficiente $T(x)$. Seja $g[T(x)]$, dado por:

$$g\left[T(x)\right] = \begin{cases} X_{(n)} - \frac{n\theta}{n+1}, & \text{se } 0 < X_{(n)} < \theta,\ \theta \in [1; +\infty) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Dizer $T(x) = X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$, é o mesmo que dizer que $T(x)$ é um x, no entanto, o maior x dentre os n existentes. Isto é, $X_{(n)} = x$. Assim, pode-se rescrever $g\left[T(x)\right]$, do seguinte modo.

$$g\left[T(x)\right] = \begin{cases} x - \frac{n\theta}{n+1}, & \text{se } 0 < x < \theta,\ \theta \in [1; +\infty) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \int_0^\theta g\left[T(x)\right] f_{X_{(n)}}(x)\, dx,$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \int_0^\theta \left(x - \frac{n\theta}{n+1}\right)\cdot n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,dx = \int_0^\theta x\cdot n\cdot \frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,dx - \int_0^\theta \frac{n\theta}{n+1}\cdot n\cdot \frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,dx$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\,dx - \frac{n^2\theta}{n+1}\cdot\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n-1}\,dx$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \frac{n}{\theta^n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\bigg|_0^\theta - \frac{n^2\theta}{n+1}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{x^n}{n}\bigg|_0^\theta$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)} - \frac{n^{\cancel{2}}\theta}{n+1}\cdot\frac{1}{\cancel{\theta^n}}\cdot\frac{\cancel{\theta^n}}{\cancel{n}}$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \frac{n}{\cancel{\theta^n}}\frac{\cancel{\theta^n}\theta}{(n+1)} - \frac{n\cdot\theta}{n+1}$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = \frac{n\cdot\theta}{n+1} - \frac{n\cdot\theta}{n+1}$$

$$\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = 0$$

Como se pode observar, $\mathbb{E}\left(g\left[T(x)\right]\right) = 0$, mas $g\left[T(x)\right] \neq 0$. Logo $g\left[T(x)\right]$ não é zero quase certamente, isto é, $P\left([g(T(x))] = 0\right] \neq 1$, como consequência, $T(x) = X_{(n)}$ não é completa.

37) Use o Teorema de Basu para provar a independência dos seguintes pares de estatísticas:

b) $X_{(1)}$ e $P(X_i - X_{(1)})$, onde os X_i's são iid com distribuição $E(a, b)$.

Primeiramente vamos mostrar que $X_{(1)}$ é suficiente e completa.
Observe que, para $a > 0$ e um valor arbitrário de $b > 0$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
f(x, a, b) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b}\exp\left\{-\frac{1}{b}(x_i - a)\right\} I(x_i > a) \\
&= \frac{1}{b^n}\exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^n (x_i - a)\right\} I(x_{(1)} > a), \quad x_{(1)} = min(X_1, \ldots, X_n) \\
&= \frac{1}{b^n}\exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^n x_i\right\}\exp\left\{\frac{na}{b}\right\} I(x_{(1)} > a) \\
&= h(x) g_a(T(x)),
\end{aligned}$$

em que $h(x) = \frac{1}{b^n}\exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^n x_i\right\}$ e $g_a(T(x)) = \exp\left\{\frac{na}{b}\right\} I(x_{(1)} > a)$. Assim, pelo Critério da Fatoração $T = X_{(1)} = min(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente para $\theta = a$.

Para mostrar que $T = X_{(1)}$ é completa, temos que, dado

$$\begin{aligned}
P(X_{(1)} \geq x) &= \int_x^\infty \frac{1}{b}\exp\left\{-\frac{t-a}{b}\right\} dt = \exp\left\{\frac{a}{b}\right\}\int_x^\infty \frac{1}{b}\exp\left\{-\frac{t}{b}\right\} dt \\
&= \exp\left\{\frac{a}{b}\right\}\exp\left\{\frac{-x}{b}\right\} = \exp\left\{\frac{a-x}{b}\right\}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P(X_{(1)} \leq x) &= P(min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x) = 1 - P(min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) \\
&= 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - [P(X_1 > x)]^n = 1 - \exp\left\{n\frac{a-x}{b}\right\}
\end{aligned}$$

para $x > 0$ e 0 caso contrário. Assim

$$P(X_{(1)} = x) = \frac{n}{b}\exp\left\{n\frac{a-x}{b}\right\} I(x > a)$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
E[g(T)] = \int_a^\infty g(t)\frac{n}{b}\exp\left\{n\frac{a-t}{b}\right\}dt = 0, \quad \forall a > 0 \\
\int_a^\infty g(t)\exp\left\{\frac{-nt}{b}\right\}dt = 0, \quad \forall a > 0
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema Fundamental do Calculo, temos

$$
\left[\lim_{h\to\infty} H(n) - H(a)\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\lim_{h\to\infty} H(n) - H(a)\right] = g(a)\exp\left\{\frac{-na}{b}\right\}
$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial a}[\lim_{h\to\infty} H(n)] = \lim_{h\to\infty}[\frac{\partial}{\partial a}H(n)] = \lim_{h\to\infty}[g(n)\exp\left\{\frac{-nh}{b}\right\}] = 0$.
Assim,

$$
\begin{aligned}
g(a)\exp\left\{\frac{-na}{b}\right\} = 0, \quad \forall a \\
g(a) = 0, \quad \forall a \\
g(t) = 0, \quad \forall t
\end{aligned}
$$

Portanto, $P_a(g(t) = 0) = 1$. Logo, $T = X_{(1)}$ é completa.

Além disso, para $U = (U_1, \ldots, U_n)$, tal que U_i's, com $i = 1, \ldots, n$, são independentes com distribuição $E(0, b)$. Pode-se escrever X_i como $X_i = U_i + a$, $i = 1, \ldots, n$ e $a > 0$. Com $X_{(1)} = U_{(1)} + a$, $a > 0$. Desse modo, a distribuição de $Y_i = X_i - X_{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$ é tal que

$$
P(Y_i \leq y_i) = P(X_i - X_{(1)} \leq y_i) = P(U_i + a - (U_{(1)} + a)) \leq y_i) = P(U_i - U_{(1)}) \leq y_i)
$$

que, pela invariância de localização, não depende de a. Portanto, $Y_i = X_i - X_{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$ é ancilar. Dado que X_i's são iid, então $S = \sum_{i=1}^n X_i - X_{(1)}$ também é ancilar.
Pelo Teorema de Basu, se T é uma estatística suficiente e completa para $P = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, então toda estatística ancilar S é independente de T. Assim, provamos que $X_{(1)}$ e $P(X_i - X_{(1)})$ são independentes.