UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Programa de Post-Graduação em Estatística

Katerine Zuniga Lastra, Marília de Melo Sombra, Alex Monito Nhancololo

Lista 02 – Semestre de 2024-II – Prof. Silvia Ferrari

3) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com $X_i \sim N(m_i\mu, m_i\sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$, em que $m_1, \ldots, m_n$ são inteiros positivos conhecidos, e $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ são desconhecidos. Essa situação ocorre quando se observam os totais de n grupos, em que o i-ésimo grupo é formado de m_i observações independentes de $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre os estimadores não viciados de variância uniformemente mínima de μ e σ^2.

Obs. Na resolução de este exercício, considera-se $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $m_i \in \mathbb{N}^*$ e , $n > 0$.
Resolução

$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_i\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right\}$$
$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{m_i\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2 - 2x_im_i\mu + m_i^2\mu^2}{2m_i\sigma^2}\right\}$$
$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \exp\left\{log\left(\frac{1}{\sqrt{m_i\sigma^2}}\right)\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2m_i\sigma^2} + \frac{\cancel{2}x_i\cancel{m_i}\mu}{\cancel{2}\cancel{m_i}\sigma^2} - \frac{m_i^{\cancel{2}}\mu^2)}{2\cancel{m_i}\sigma^2}\right\}$$
$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \exp\left\{-\,log\left(\sqrt{m_i\sigma^2}\right)\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2m_i\sigma^2} + \frac{x_i\mu}{\sigma^2} - \frac{m_i\mu^2)}{2\,\sigma^2}\right\}$$
$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2m_i\sigma^2} + \frac{x_i\mu}{\sigma^2} - \frac{m_i\mu^2}{2\,\sigma^2} - log\left(\sqrt{m_i\sigma^2}\right)\right\}$$
$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2m_i\sigma^2} + \frac{x_i\mu}{\sigma^2} - \frac{m_i\mu^2}{2\,\sigma^2} - log\left(\sqrt{m_i\sigma^2}\right)\right\}$$
$$f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{h(x)} \exp\left\{\underbrace{-\frac{x_i^2}{2m_i\sigma^2} + \frac{x_i\mu}{\sigma^2}}_{\eta_i T(x)} - \underbrace{\left(\frac{m_i\mu^2}{2\,\sigma^2} + log\left(\sqrt{m_i\sigma^2}\right)\right)}_{\mathcal{A}(\eta)}\right\}$$

Logo, $f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2)$ pertence à família exponencial. Para encontrar o ENVVUM de μ, σ^2 terá de ser fixado e, para encontrar o ENVVUM de σ^2, μ terá de ser fixado. Ou seja, $f(x; m_i\mu, m_i\sigma^2)$ para apenas σ^2 fixado pertencerá à família exponencial uniparamétrica, idem para apenas μ fixado. Pelo teorema de limite inferior de Cramér-Rao (LICR), se $f(\cdot)$ pertence à família exponencial uniparamétrica, então, existe uma estatística $g(x)$ não viesada cuja variância é igual ao limite inferior de Cramér-Rao e, essa estatística é um ENVVUM.

Atingindo o LICR, e satisfazendo todas as suas condições de regularidade, tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que, $g(x) - \tau(\theta)$ e $\frac{\partial}{\partial\tau(\theta)} \log L(\tau(\theta)|x)$ são proporcionais, sendo $L(\cdot)$ a função de verossimilhança de $f(\cdot)$ e $g(x)$ ENVVUM do parâmetro (função) $\tau(\theta)$. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial\tau(\theta)} logL(\tau(\theta)|x) = a(\theta)\left[g(x) - \tau(\theta)\right] \tag{1}$$

Se $f(.)$ atinge o LICR, e o estimador de máxima verossimilhança (MV) $\hat{\tau}(\theta)_{MV}$, poder ser encontrado analiticamente (sem precisar de algum método numérico), tem-se:

$$Var[g(x)] = \frac{1}{a(\theta)} \text{ e, substituíndo na (1)}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau(\theta)} log L(\tau(\theta)|x) = \frac{1}{Var[g(x)]}\left[g(x) - \tau(\theta)\right] \tag{2}$$

$\Longrightarrow$ Encontrando ENVVUM de μ

Seja $\tau(\theta) = \mu$ e $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, vamos verificar se o $\hat{\mu}_{MV}$ pode ser encontrando analiticamente.

$$\begin{aligned}
f(X; m_i\mu, m_i\sigma^2) = L(\mu, \sigma^2|X) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi m_i \sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right\}, \quad X_i \text{ são iid} \\
L(\mu, \sigma^2|X) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi m_i\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right)\right\} \\
\ell(\mu, \sigma^2) &= log\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi m_i\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right)\right\}\right] \\
\ell(\mu, \sigma^2) &= log\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi m_i\sigma^2}}\right)^n\right] + log\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right)\right\}\right] \\
\ell(\mu, \sigma^2) &= -n\, log\left(\sqrt{2\pi m_i\sigma^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Procurando estimador de MV de μ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= \cancel{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(x_i - m_i\mu)}{\cancel{2}\cancel{m_i}\sigma^2}\cdot(-\cancel{m_i})\right), \quad \sigma^2 \text{ é fixo} \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_i\mu)}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\mu}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sigma^2}, \quad (**) \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sigma^2} = 0, \quad \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \Longleftrightarrow \cancel{-}\mu\sum_{i=1}^{n} m_i = \cancel{-}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad \text{porque, } \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} = -\sum_{i=1}^{n} m_i < 0$$

Note que $\hat{\mu}_{MV}$ não depende de μ, logo é estimável analiticamente e podemos usar (2) para encontrar o ENVVUM, aqui denotado por $g(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= \frac{1}{Var[g(x)]}\left[g(x) - \tau(\theta)\right] \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sigma^2} \times \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}, \quad \text{vide } (**) \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} - \mu\cancel{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}}{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^2) &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} - \mu}{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} - \mu\right] = \frac{1}{Var[g(x)]}\left[g(x) - \tau(\theta)\right]
\end{aligned}$$

Logo, $g(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ é um ENVVUM de μ e $Var[g(x)] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = LICR$, porque $f(\cdot)$ para σ^2 fixo, pertence à família exponencial uniparamétrica.
Assim, $g(x) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i})$

$\Longrightarrow$ Encontrando ENVVUM de σ^2, tomando μ como fixo

$$\ell(\mu,\sigma^2) = -n\,log\left(\sqrt{2\pi m_i\sigma^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i\sigma^2}\right) \qquad \text{vide } (*)$$

$$\ell(\mu,\sigma^2) = -n\,log\left(\sqrt{2\pi m_i}\right) - n\,log\left(\sqrt{\sigma^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i}\right)$$

$$\ell(\mu,\sigma^2) = -n\,log\left(\sqrt{2\pi m_i}\right) - \frac{n}{2}\,log\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i}\right)$$

$\Longrightarrow$ Procurando estimador de MV de σ^2

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2\,\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\mu)^2}{2m_i}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = 0$$

$$-\frac{n}{2\,\hat\sigma^2} + \frac{1}{\hat\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{2m_i}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\hat\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{2m_i}\right) = \frac{n}{2\,\hat\sigma^2}$$

$$\frac{n}{2\,\hat\sigma^2} = \frac{1}{\hat\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{2m_i}\right)$$

$$\frac{n\hat\sigma^4}{2\,\hat\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{2m_i}\right)$$

$$\frac{n\hat\sigma^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{2m_i}\right)$$

$$\hat\sigma^2 = \frac{\cancel{2}}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{\cancel{2}m_i}\right)$$

$$\hat\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{n\,m_i}\right)$$

Observe que $\hat\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{n\,m_i}\right)$ em posse de toda população não é viesado, mas para caso amostral é viesado, sendo necessário corrigir por $n-1$, análago à variância amostral. Assim,

$$\hat\sigma^2_{MV} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right), \quad \text{porque } \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ell(\mu,\sigma^2) < 0$$

Note que $\hat\sigma^2_{MV}$ não depende de σ^2, logo $\tau^*(\theta) = \sigma^2$ é estimável analiticamente e podemos usar (2) para encontrar o ENVVUM, aqui denotado por $g^*(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{Var[g^*(x)]}\left[g^*(x) - \tau^*(\theta)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{(n-1)}{2\,\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{2m_i}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{m_i}\right) - (n-1)\sigma^2}{2\,\sigma^4} \times \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\mu,\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right) - \sigma^2}{\frac{2\,\sigma^4}{n-1}} = \frac{1}{\frac{2\,\sigma^4}{n-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i - m_i\hat\mu_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right) - \sigma^2\right] = \frac{1}{Var[g^*(x)]}\left[g^*(x) - \tau^*(\theta)\right]$$

Logo, $g^*(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)$ é um ENVVUM de σ^2, lembrando que $\hat{\mu}_{MV} = g(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ e $Var[g^*(x)] = \frac{2\,\sigma^4}{n-1} = LICR$, porque $f(\cdot)$ para μ fixo, pertence à família exponencial uniparamétrica. Assim, $g^*(x) \sim \chi^2_{(n-1)}$.

$\Longrightarrow$ Verificando a não viesidade de $g^*(x)$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)\,m_i}\mathbb{E}[(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)\,m_i}\mathbb{E}\left[\left(x_i - m_i\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right)^2\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)\,m_i}\left[Var\left(x_i - m_i\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right) + \mathbb{E}^2\left(x_i - m_i\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)\,m_i}\left[Var\,(x_i) - m_i^2 Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right) + \left[\mathbb{E}(x_i) - m_i\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right)\right]^2\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)\,m_i}\left[m_i\sigma^2 - m_i^2\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n m_i} + \mathbb{E}\left[m_i\mu - m_i\mu\right]^2\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)}\left[\sigma^2 - m_i\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n m_i}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \frac{1}{(n-1)}\left[\sum_{i=1}^n \sigma^2 - \sum_{i=1}^n m_i\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n m_i}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \frac{1}{(n-1)}\left[n\sigma^2 - \sigma^2\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \frac{1}{(n-1)}(n-1)\sigma^2$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - m_i\hat{\mu}_{MV})^2}{(n-1)\,m_i}\right)\right] = \sigma^2$$

$g^*(x)$ não é viesado, para σ^2. Como $f(\cdot)$ fixando μ é da família exponencial uniparamétrica, e $g^*(x)$ é função de uma estatística suficiente completa $T(x) = x^2$, $g^*(x)$ é ENVVUM de σ^2 pelo teorema de Lehmann-Scheffé.

7) Seja X o conjunto dos números naturais, i.e. $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, e $A \subset X$, não vazio. Suponha que X tem distribuição de Poisson de parâmetro λ truncada em A, ou seja, a distribuição de X coincide com a distribuição de Y condicional a que $Y \in A$, sendo que $Y \sim$ Poisson(λ).

   a) Suponha que $A = \{0, 1, 2, \ldots, a\}$, em que a é um inteiro positivo. Mostre que λ não tem um estimador não viciado.
   Resolução

$$f(Y = x|Y \in A; \lambda) = \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}{P(y \leq a)} = \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}{\sum_{y=0}^a \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x! e^{-\lambda}\sum_{y=0}^a \frac{\lambda^y}{y!}} = \frac{\lambda^x}{x!\sum_{y=0}^a \frac{\lambda^y}{y!}}$$

$$f(Y = x \mid Y \in A; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!\sum_{x=0}^a \frac{\lambda^y}{y!}}, & \text{se } x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, a\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O intervalo de valores onde a função $f(\cdot)$ é não negativa, depende de parâmetro, logo, $f(\cdot)$ não pertence à família exponencial e como consequência, não se pode usar o LICR, Rao-Blackwell e nem o teorema de Lehmann-Scheffé, podendo apenas provar pela definição $\mathbb{E}[g(x)] = \lambda$.
Obs. Na resolução que segue considera-se $\lambda > 0, a \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(x)] &= \lambda \\
\sum_{x=0}^{a}\left\{ g(x)\left[\frac{\lambda^x}{x!\sum_{y=0}^{a}\frac{\lambda^y}{y!}}\right]\right\} &= \lambda \\
\sum_{k=0}^{a}\left\{ g(x)\cdot\frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}{\sum_{y=0}^{a}\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}}\right\} &= \lambda \\
\frac{1}{\sum_{y=0}^{a}\frac{\lambda^y \cancel{e^{-\lambda}}}{y!}}\sum_{x=0}^{a} g(x)\cdot\frac{\lambda^x \cancel{e^{-\lambda}}}{x!} &= \lambda \\
\sum_{x=0}^{a} g(x)\cdot\frac{\lambda^x}{\lambda x!} &= \sum_{y=0}^{a}\frac{\lambda^y}{y!} \\
\sum_{x=0}^{a} g(x)\cdot\frac{\lambda^{x-1}}{x!} &= \left(\sum_{y=0}^{a-1}\frac{\lambda^y}{y!}\right)+\frac{\lambda^a}{a!} \\
\sum_{x=0}^{a} g(x)\cdot\frac{\lambda^{x-1}}{x!} &= \left(\sum_{y=0}^{a-1}\frac{\lambda^y}{y!}\right)+\frac{\lambda^a}{a!} \\
g(0)\cdot\frac{\lambda^{-1}}{0!}+g(1)\cdot\frac{\lambda^0}{1!}+g(2)\cdot\frac{\lambda^1}{2!}+\ldots+g(a)\cdot\frac{\lambda^{a-1}}{a!} &= \frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\ldots+\frac{\lambda^{a-1}}{(a-1)!}+\frac{\lambda^a}{a!} \\
g(0)\cdot\lambda^{-1}+g(1)+g(2)\cdot\frac{\lambda}{2}+\ldots+g(a)\cdot\frac{\lambda^{a-1}}{a!} &= 1+\lambda+\ldots+\frac{\lambda^{a-1}}{(a-1)!}+\frac{\lambda^a}{a!}
\end{aligned}
$$

Tomando como referência o λ, todos termos com mesmo grau de λ são considerados semelhantes.

$$
\begin{cases}
g(0)\cdot\lambda^{-1} & = 0 \Longrightarrow g(0)=0 \\
g(1) & = 1 \\
g(2)\cdot\frac{\lambda}{2} & = \lambda \\
\ldots & = \ldots \\
g(a)\cdot\frac{\lambda^{a-1}}{a!} & = \frac{\lambda^{a-1}}{(a-1)!} \\
0 & = \frac{\lambda^a}{a!} \Longleftrightarrow 0 = 1 \quad \text{se } a = \min\{A\} = 0
\end{cases}
$$

Como se sabe, é impossível um (1) ser igual a zero (0), pois, um (1) é sucessor de zero (0). Não só, considerando qualquer "a" maior que zero e finito ($0 < a < \infty$), como $\lambda > 0$, a expressão $\frac{\lambda^a}{a!} \neq 0$. Logo, com esta esplanação provamos que não existe um estimador $g(x)$ não viesado (viciado) para λ.

b) Suponha que $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Encontre o ENVVUM de λ.
Resolução

$$f(Y = x|Y \in A; \lambda) = \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}{1 - P(y = 0)} = \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}{1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!\,(1 - e^{-\lambda})} = \frac{\lambda^x}{x! e^{\lambda}\,(1 - e^{-\lambda})}$$

$$f(Y = x \mid Y \in A; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{(e^{\lambda}-1)x!}, & x \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O intervalo de valores onde a função $f(\cdot)$ é não negativa, não depende de parâmetro, logo, $f(\cdot)$ pertence à família exponencial (FE) e como consequência, poder-se-ia usar o LICR, Rao-Blackwell e ou teorema de Lehmann-Scheffé. No entando, não é possível encontrar analiticamente um estimador de MV que não dependa de λ (não será demostrado aqui), logo, LICR e Rao-Blackwell não são as vias mais flexíveis (ou ideiais), sendo ideal utilizar o teorema de Lehmann-Scheffé e usando a estatística suficiente completa (trivial se $f(\cdot)$ é da FE), encontrar $g(x)$ não viesado ($\mathbb{E}[g(x)] = \lambda$), que seja função da estatistica suficiente completa ($T(x)$).
Obs. Na resolução deste exercício, considera-se $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
f(x, \lambda) &= \frac{\lambda^x}{(e^{\lambda} - 1)x!}, \quad x \in \mathbb{N}^* \\
f(x, \lambda) &= \frac{e^{log(\lambda^x)}}{x! e^{log(e^{\lambda}-1)}} \\
f(x, \lambda) &= \frac{\exp\left\{log\left(\lambda^x\right) - log\left(e^{\lambda} - 1\right)\right\}}{x!} \\
f(x, \lambda) &= \frac{1}{x!} \exp\left\{\underbrace{x}_{T(x)}\underbrace{log\left(\lambda\right)}_{\eta} - \underbrace{log\left(e^{\lambda} - 1\right)}_{\mathcal{A}(\eta)}\right\}
\end{aligned}$$

Como pode-se notar, $f(\cdot)$ pertence à família exponencial de posto completo, logo, $T(x) = x$ é uma estatistica suficiente completa. Seja, $g(x) = a \cdot [T(x)] = a \cdot x$, uma função da estatística completa $T(x) = x$, se existir "a", função de x apenas, tal que $g(x) = a \cdot [T(x)]$, resulta num estimador não viesado de λ, então, $g(x)$ é um ENVVUM.

$$\begin{aligned}
f(x, \lambda) &= \frac{\lambda^x}{(e^{\lambda} - 1)x!}, \quad x \in \mathbb{N}^* \\
\mathbb{E}[g(x)] &= \lambda \\
\sum_{x=1}^{\infty} g(x) f(x, \lambda) &= \lambda, \quad x \text{ é variável aleatória discreta} \\
\sum_{x=1}^{\infty} g(x) \frac{\lambda^x}{(e^{\lambda} - 1)x!} &= \lambda, \quad \text{condição para g(x) não ser viesado} \\
\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot x \frac{\lambda^x}{x!} &= \lambda(e^{\lambda} - 1) \\
\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot x \frac{\lambda^x}{x(x-1)!\lambda} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1, \quad e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}, \text{ (série de Maclaurin ou de Taylor com } c = 0) \\
\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \\
\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} &= \frac{\lambda^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \\
\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \\
\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Continuação da resolução do exercício 7b)

$$\sum_{x=1}^{\infty} a \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$a \cdot \frac{\lambda^{1-1}}{(1-1)!} + a \cdot \frac{\lambda^{2-1}}{(2-1)!} + a \cdot \frac{\lambda^{3-1}}{(3-1)!} + a \cdot \frac{\lambda^{4-1}}{(4-1)!} + \ldots = \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots$$

$$a + a\lambda + a \cdot \frac{\lambda^2}{2} + a \cdot \frac{\lambda^3}{6} + \ldots = \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \ldots$$

$$\begin{cases} a = 0 & \text{para } x = 1 \\ a = 1 & \text{para } x = 2 \\ a = 1 & \text{para } x = 3 \\ a = 1 & \text{para } x = 4 \\ \ldots & \\ a = 1 & \forall x \in A \setminus \{1\} \end{cases}$$

Assim, como encontrou-se "a", pode-se escrever a função $g(x)$, substituindo a pelo valor correspondente encontrando e observando todas condições em ele existe.

$$g(x) = a \cdot [T(x)] = a \cdot x$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 \cdot x & \text{se } x = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \\ 0 \cdot x & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Verificando se g(x) não é viesado

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{(e^\lambda - 1)x!}, \quad x \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_{x=2}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{(e^\lambda - 1)x!}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{1}{e^\lambda - 1} \sum_{x=2}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1} \sum_{x=2}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x(x-1)!}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{(x-1)}}{(x-1)!}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{\lambda}{\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}} \cancel{\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!}}, \qquad \text{observe que } k = x - 1,\ x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\mathbb{E}[g(x)] = \lambda$$

Como $g(x)$ é função da estatística suficiente completa $T(x) = x$, e é uma estatistica não viesada, pelo teorema de Lehmann-Scheffé $g(x)$ é um ENVVUM de λ.

7 c) Suponha que $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Encontre o ENVVUM de $e^{-\lambda}$. Critique o estimador encontrado.

Resolução
Obs. Na resolução deste exercício, considera-se $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}$

Seja, $S(x) = b \cdot [T(x)] = b \cdot x$, uma função da estatística suficiente completa $T(x) = x$, se existir "b", função de x apenas, tal que $g(x) = b \cdot [T(x)]$, resulta num estimador não viesado de $e^{-\lambda}$, então, $S(x)$ é um ENVVUM.

$$f(x,\lambda) = \frac{\lambda^x}{(e^\lambda - 1)x!}, \quad x \in \mathbb{N}^*$$
$$\mathbb{E}[S(x)] = e^{-\lambda}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} s(x)\frac{\lambda^x}{(e^\lambda - 1)x!} = e^{-\lambda}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot x\frac{\lambda^x}{(e^\lambda - 1)x!} = e^{-\lambda}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot x\frac{\lambda^x}{x(x-1)!} = e^{-\lambda}(e^\lambda - 1)$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = (1 - e^{-\lambda})$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}, \quad e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}, \text{ (que é série de Maclaurin ou de Taylor com } c = 0)$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = 1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1 \cdot (-1)^k\lambda^k}{k(k-1)!}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} b \cdot \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\lambda^k}{k(k-1)!}, \text{ observe que } k = x$$
$$b = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$b = \frac{(-1)^{x+1}}{x}$$
$$\Longrightarrow \text{Substituindo } b \text{ em } S(x)$$
$$S(x) = b \cdot [T(x)] = b \cdot x$$
$$S(x) = \frac{(-1)^{x+1}}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}$$
$$S(x) = (-1)^{x+1}$$

Como $S(x)$ é função da estatística suficiente completa $T(x) = x$, e é uma estatistica não viesada, pelo teorema de Lehmann-Scheffé $S(x)$ é um ENVVUM de $e^{-\lambda}$.

Observe que $S(x)$ é uma série alternada, ou seja, assume valor positivo se x for impar e valor negativo se x for par. Tomando $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$, se $\lambda = 0$, $\tau(\lambda) = 1$ e $\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} e^{-\lambda} = 0$. Assim, se x for par sempre resultará em valores fora do espaço paramétrico da função função $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$, que é $(0, 1)$, como consequênicia, S(x) não é bom estimador.

16) Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição discreta com função de probabilidade $f_{\theta,j}$, em que $\theta > 0$ e $j = 1, 2$; $f_{\theta,1}$ é a distribuição de Poisson de média θ e $f_{\theta,2}$ é a distribuição

geométrica de parâmetro $\theta/(1+\theta)$, istó é,

$$f_{\theta,2}(x) = \left[1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right]\left[\frac{\theta}{1+\theta}\right]^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Existe ENVVUM de θ? Justifique.

Resolução

Para $j = 1$, temos:

$(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim$ Poisson(θ), $\theta > 0$. Observe que X pertence a família exponencial,

$$f_{\theta,1}(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \frac{1}{x!}\exp\{x\log\theta - \theta\} = h(x)\exp\{T(x)\eta(\theta) - B(\theta)\}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

em que, $h(x) = \frac{1}{x!}$, $T(x) = x$, $\eta(\theta) = \log\theta$ e $B(\theta) = \theta$. O domínio de variação de $\eta(\theta) = (0, \infty)$ contém retângulos unidimensionais. Logo, $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente minimal e completa.

Note que,

$$E_\theta\left[\frac{T}{n}\right] = E_\theta\left[\bar{X}\right] = \theta, \forall\theta$$

Logo, $\bar{X}$ é o ENVUUM para θ, quando $j = 1$.

Para $j = 2$, temos:

$(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim$ Geométrica$(1 - \frac{\theta}{1+\theta})$, $\theta > 0$. Observe que X pertence a família exponencial,

$$f_{\theta,2}(x) = \left[1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right]\left[\frac{\theta}{1+\theta}\right]^x = \exp\left\{x\log\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) + \log\left(1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right)\right\} = h(x)\exp\{T(x)\eta(\theta) - B(\theta)\}$$

com $x = 0, 1, 2, \ldots$, em que, $h(x) = 1$, $T(x) = x$, $\eta(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$ e $B(\theta) = -\log\left(1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right)$. O domínio de variação de $\eta(\theta) = (0, \infty)$ contém retângulos unidimensionais. Logo, $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente minimal e completa.

Note que,

$$E_\theta\left[\frac{T}{n}\right] = E_\theta\left[\bar{X}\right] = \frac{1 - \left[1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right]}{1 - \frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{\frac{1}{1+\theta}} = \theta, \forall\theta$$

Logo, $\bar{X}$ é o ENVUUM para θ, quando $j = 2$.

17) Seja $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com função densidade de probabilidade $f_\theta(x) = \theta/x^2$, $x > \theta$; $\theta > 0$. Encontre um ENVVUM de $g(\theta)$ assumindo que $g(\theta)/\theta^n \to 0$ quando $\theta \to \infty$ e que g é diferenciável.

Resolução

A função de verossimilhança é dada por,

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i^2} I_{(\theta,\infty)}(x_i) = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^n x_i^2} I_{(0,x_{(1)})}(\theta) = h(x)g_\theta(T(x)),$$

em que $h(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$ e $g_\theta(T(x)) = \theta^n I_{(0,x_{(1)})}(\theta)$. Pelo Critério da Fatoração, temos que $T = X_{(1)}$ é estatística suficiente para θ.

A distribuição de T é dada por,

$$\begin{aligned}
F_T(t) = P(T \leq t) &= P(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq t) \\
&= 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_n) > t) \\
&= 1 - P(X_1 > t, \ldots, X_n > t) \\
&\overset{ind}{=} 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > t) \\
&\overset{id.}{=} 1 - [P(X_i > t)]^n \\
&= 1 - [1 - P(X_1 < t)]^n
\end{aligned}$$

Observe que,

$$F_X(t) = \int_\theta^t \frac{\theta}{x^2} dx = \theta \int_\theta^t x^{-2} dx = \theta \left[-x^{-1} \mid_\theta^t \right] = \theta \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{\theta} \right] = 1 - \frac{\theta}{t}$$

Assim,

$$F_T(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n = 1 - \left[1 - \left[1 - \frac{\theta}{t} \right] \right]^n = 1 - \left[\frac{\theta}{n} \right]^n = 1 - \frac{\theta^n}{t^n}$$

Logo, a densidade de $T = X_{(1)}$ é,

$$f_T(t) = \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} I_{(\theta,\infty)}(t)$$

Seja g uma função de T,

$$\begin{aligned}
&E_\theta(g(t)) = 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow \int_\theta^\infty \frac{g(t) n\theta^n}{t^{n+1}} dt = 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow \int_\theta^\infty \frac{g(t)}{t^{n+1}} dt = 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\text{Pelo Teorema Fundamental do Cálculo} \\
&\Rightarrow \left[\lim_{a\to\infty} H(a) - H(\theta) \right] = 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\lim_{a\to\infty} H(a) - H(\theta) \right] = \frac{\partial}{\partial\theta} 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow \frac{g(\theta)}{\theta^{n+1}} = 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow g(\theta) = 0, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow g(t) = 0, \ \forall t > \theta \\
&\Rightarrow P(g(t) = 0) = 1
\end{aligned}$$

Logo, $T = X_{(1)}$ é uma estatística suficiente e completa. Note que,

$$\begin{aligned}
&E_\theta[\delta(t)] = \int_\theta^\infty \frac{\delta(t) n\theta^n}{t^{n+1}} dt = g(\theta), \ \forall \theta > 0 \\
&\text{Como } g(\theta)/\theta^n \to 0 \text{ quando } \theta \to \infty \\
&\Rightarrow \int_\theta^\infty \frac{\delta(t)}{t^{n+1}} dt = \frac{g(\theta)}{n\theta^n}, \ \forall \theta > 0, \\
&\Rightarrow \left[\lim_{a\to\infty} H(a) - H(\theta) \right] = \frac{g(\theta)}{n\theta^n}, \ \forall \theta > 0 \\
&\text{Como } g(\theta) \text{ é diferenciável} \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\lim_{a\to\infty} H(a) - H(\theta) \right] = \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{g(\theta)}{n\theta^n}, \ \forall \theta > 0 \\
&\Rightarrow -\frac{\delta(\theta)}{\theta^{n+1}} = \frac{g'(\theta) n\theta^n - g(\theta) n^2 \theta^{n-1}}{n^2\theta^{2n}}, \ \forall \theta > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \delta(\theta) &= \frac{g(\theta) n^2 \theta^{n-1} \theta^{n+1} - g'(\theta) n\theta^n \theta^{n+1}}{n^2\theta^{2n}}, \ \forall \theta > 0 \\
&= \frac{g(\theta) n^2 \theta^{2n} - g'(\theta) n\theta^{2n+1}}{n^2\theta^{2n}}, \ \forall \theta > 0 \\
&= g(\theta) - \frac{g'(\theta)\theta}{n}, \ \forall \theta > 0 \\
\Rightarrow \delta(t) &= g(t) - \frac{g'(t)t}{n}, \forall t > 0
\end{aligned}$$

Assim, $\delta(T) = g(T) - \frac{g'(T)T}{n}$, em que $T = X_{(1)}$, é ENVVUM para $g(\theta)$.

29) Seja $(X1, ..., Xn)$ uma amostra aleatória da distribuição de Pareto com função densidade de probabilidade $p_{\theta,\gamma}(x) = \theta\gamma^{\theta}x^{-(\theta+1)}I_{[\gamma,\infty)}(x), \theta > 0, \gamma > 0$.
Seja $\mathcal{P} = \{P_{\theta,\gamma} : \theta > 0 \text{ e } \gamma > 0\}$ a família de possíveis distribuições da variável aleatória $X \sim$ Pareto(θ, γ).

a) Suponha que γ seja conhecido. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} log(Xi/\gamma)$ é uma estatıstica suficiente completa.
Resolução
Considerando ao parâmetro γ conhecido temos a densidade conjunta da distribuição Pareto iid como segue:

$$
\begin{aligned}
p_\theta(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \theta\gamma^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}I_{[\gamma,\infty)}(x_i), \theta > 0 \\
&= \theta^n\gamma^{n\theta}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}I_{[\gamma,\infty)}(x_i), \theta > 0 \\
&= \theta^n\gamma^{n\theta}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-\theta}x_i^{-1}I_{[\gamma,\infty)}(x_i), \theta > 0 \\
&= \exp\left\{-\theta\sum_{i=1}^{n}\log x_i + n\log(\theta) + n\theta\log(\gamma)\right\}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}I_{[\gamma,\infty)}(x_i), \theta > 0 \\
&= \exp\left\{\underbrace{-\theta}_{\eta}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)}_{T(\boldsymbol{x})} + \underbrace{n\log(\theta)}_{-A(\eta)}\right\}\underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}I_{[\gamma,\infty)}(x_i)}_{h(\boldsymbol{x})}, \theta > 0
\end{aligned}
$$

seja

$$\eta = -\theta, T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{x_i}{\gamma}\right), A(\eta) = -n\log(\theta) = -n\log(-\eta) \text{ e } h(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}I_{[\gamma,\infty)}(x_i)$$

O parâmetro natural é $\eta = \eta(\theta) = -\theta \implies \eta(\theta) \in R^-$. Então, o espaço paramétrico $\eta(\theta) \in (-\infty, 0)$ contém retângulos unidimensionais abertos. Nem a T nem o η satisfazem restrições lineares, portanto dizemos que a família é de posto completo. Assim, a estatística $T = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{X_i}{\gamma}\right)$ é estatística suficiente completa para a família de distribuições de X com o parâmetro γ conhecido.

b) Suponha que γ seja conhecido. Encontre o estimador não viciado de variância uniformemente mınima de θ.
Resolução
Considere a transformação $Y = \log\left(\frac{x}{\gamma}\right)$, então a distribuição acumulada de Y é dada por

$$
\begin{aligned}
P(Y \le y) &= P\left[\log\left(\frac{X}{\gamma}\right) \le y\right] = P\left(\frac{X}{\gamma} \le e^y\right) = P\left(X \le \gamma e^y\right) = \int_{\gamma}^{x} f(x,\theta,\gamma)dx, \forall x \ge \gamma, \theta > 0 \\
&= \int_{\gamma}^{\gamma e^y} \theta\gamma^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx = \theta\gamma^{\theta}\int_{\gamma}^{\gamma e^y} x^{-(\theta+1)}dx = \theta\gamma^{\theta}\left(\frac{x^{-\theta}}{-\theta}\right)\Bigg|_{\gamma}^{\gamma e^y} = \left[-\gamma^{\theta}x^{-\theta}\right]_{\gamma}^{\gamma e^y} \\
&= -\gamma^{\theta}\frac{1}{(\gamma e^y)^{\theta}} + 1 = 1 - e^{-\theta y}I_{(0,\infty)}(y)
\end{aligned}
$$

Então, $Y \sim$ Gama$(1, \theta)$.

Como $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias i.i.d., temos que $T = \sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{X_i}{\gamma}\right) \sim$ Gama(n, θ), para todo $\theta > 0$.

Queremos encontrar $\delta(T)$ tal que $E_\theta(\delta(T)) = \theta,\ \forall\theta > 0$. Então, $\delta(T)$ será o ENVVUM para θ.

Pela propriedade da da distribuição gama tem-se $E(T) = \frac{n}{\theta}$. Assim, tem-se trabalhar com o estimador $g(T) = \frac{n}{T}$

$$
\begin{aligned}
E_\theta[g(T)] = E_\theta\left[\frac{n}{T}\right] &= \int_0^\infty \frac{n}{t}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t\theta} dt = \frac{n\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{(n-1)-1} e^{-t\theta} dt \\
&\text{somente para} \quad n \geq 2 \\
&= \frac{n\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\theta^{n-1}}{\Gamma(n-1)} t^{(n-1)-1} e^{-t\theta} dt}_{\text{Gama}(n-1,\theta)} \\
&= \frac{n\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} = \theta n \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{n\theta}{n-1}, \forall\theta > 0 \text{ e } \gamma \text{ conhecido.}
\end{aligned}
$$

Se n = 1,

$$
\begin{aligned}
& E_\theta[\delta(T)] = \theta, \forall\theta > 0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty \delta(t) \frac{\theta}{\cancel{\Gamma(1)}} t_1^{1-1} e^{-t\theta} dt = \theta, \forall\theta > 0 \\
\Leftrightarrow & \cancel{\theta} t^0 \int_0^\infty \delta(t) e^{-t\theta} dt = \cancel{\theta}, \forall\theta > 0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty \delta(t) e^{-t\theta} dt = 1, \forall\theta > 0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty \delta(t) e^{-t\theta} dt = \int_0^\infty \theta e^{-t\theta} dt, \forall\theta > 0 \\
\Leftrightarrow & \delta(t) = \theta, \forall\theta > 0
\end{aligned}
$$

O estimador não pode depender do parâmetro. Mas como depende do parâmetro, então, não existe nenhum ENVVUM para θ

Se $n \geq 2$ e se tomarmos a estatística $T^* = \frac{n-1}{T}$, segue-se que

$$
E_\theta\left[T^*\right] = E_\theta\left[\frac{n-1}{T}\right] = (n-1)E\left[\frac{1}{T}\right] = (n-1)\frac{\theta}{n-1} = \theta, \forall\theta > 0
$$

Portanto, se $n \geq 2$ a estatística $T^* = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{X_i}{\gamma}\right)}$ é ENVUM para θ, pelo que é a função da estatística suficiente completa $T = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{X_i}{\gamma}\right)$ com média θ para todo $\theta > 0$.

c) Suponha que θ seja conhecido. Mostre que $X_{(1)} = min(X_1, ..., X_n)$ é estatística suficiente completa e encontre o estimador não viciado de variância uniformemente mınima de γ.

Resolução

Considerando ao parâmetro θ conhecido temos a densidade conjunta da distribuição Pareto iid como segue:

$$
\begin{aligned}
p_\gamma(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \theta\gamma^\theta x_i^{-(\theta+1)} I_{[\gamma,\infty)}\left(x_i\right), \gamma>0 \\
&= \gamma^{\theta n} \prod_{i=1}^{n} I_{[\gamma,\infty)}\left(x_i\right) \left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right], \gamma>0 \\
&= \gamma^{\theta n} I_{(X_1\geq\gamma)} \ldots I_{(X_n\geq\gamma)} \left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right], \gamma>0 \\
&= \gamma^{\theta n} I_{\{\min(X_1,\ldots,X_n)\geq\gamma\}} \left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right], \gamma>0 \\
&= \underbrace{\gamma^{\theta n} I_{[\gamma,\infty)}\left(x_{(1)}\right)}_{g_\gamma(T(\boldsymbol{x}))} \underbrace{\left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right]}_{h(x)}, \gamma>0
\end{aligned}
$$

Pelo Critério da Fatoração, como $g_\gamma(T(\boldsymbol{x})) = \gamma^{\theta n} I_{(\gamma,\infty)}\left(x_{(1)}\right)$ e $h(\boldsymbol{x}) = \left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right]$ são funções não negativas, a estatística $T = X_{(1)}$ é suficiente para a família de distribuições de X, com θ conhecido.
Temos mostrar que T é suficiente completa. Para tanto, considere $t = x_{(1)} \in [\gamma,\infty)$. Então, a distribuição de T é tal que

$$
\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(t) = P(T(x)\leq t) &= P(X_{(1)}\leq t) \\
&= P\left(\min\{X_1,\ldots,X_n\}\leq t\right) \\
&= 1 - P\left(\min\{X_1,\ldots,X_n\} > t\right) \\
&= 1 - P(X_1>t,\ldots,X_n>t) \\
&= 1 - \left[P(X_1>t)\right]^n \\
&= 1 - \left[1-F(t)\right]^n \\
&= 1 - \left[1 - \int_\gamma^t \theta\gamma^\theta x_1^{-(\theta+1)} d_{x_1}\right]^n \\
&= 1 - \left[1 + \theta\gamma^\theta \frac{x^-\theta}{\theta}\Big|_\gamma^t\right]^n \\
&= 1 - \left[1 + \left(\frac{\gamma}{t}\right)^\theta - 1\right]^n \\
&= 1 - \left(\frac{\gamma}{t}\right)^{n\theta} I_{[\gamma,\infty)}(t)
\end{aligned}
$$

Assim, a função densidade de probabilidade (pdf) da distribuição é dada por:

$$
f_T(t) = \frac{d}{dt} P(T(X)\leq t) = \frac{n\theta\gamma^{n\theta}}{t^{n\theta+1}} I_{((\gamma,\infty)}(t), \gamma>0
$$

Portanto, $T = X_{(1)}$ está distribuído como Pareto com parâmetros $n\theta$ e γ, ou seja, $T \sim \text{Pareto}(n\theta,\gamma)$.

A estatística Té completa se, para qualquer função $g(T)$, $E_\gamma[g(T)] = 0$, para todo $\gamma > 0$, implicar que $g(T) = 0$ quase certamente $\mathcal{P}$, com θ conhecido.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad E_\gamma[g(T)] = 0, \forall\gamma > 0\\
&\Rightarrow \quad \int_\gamma^\infty g(t) f_T(t) d_t = 0, \forall\gamma > 0\\
&\Rightarrow \quad \int_\gamma^\infty g(t) \tfrac{n\theta\gamma^{n\theta}}{t^{n\theta+1}} d_t = 0, \forall\gamma > 0\\
&\Rightarrow \quad \int_\gamma^\infty g(t) \tfrac{n}{t^{n\theta+1}} d_t = 0, \forall\gamma > 0\\
&\quad\quad\ \text{Pelo teorema fundamental de calculo (TFC) tem-se}\\
&\Rightarrow \quad \lim_{w\to\infty} G(y) - G(\gamma) = 0, \forall\gamma > 0, \text{ onde } G(t) \text{ é a antiderivada de } g(t)\tfrac{n}{t^{n\theta+1}}\\
&\Rightarrow \quad \tfrac{\partial}{\partial\gamma}\left[\cancel{\lim_{y\to\infty} G(y)}\right]^{0} = \tfrac{\partial}{\partial\gamma} G(\gamma), \forall\gamma > 0\\
&\Rightarrow \quad 0 = g(\gamma)\tfrac{n}{\gamma^{n\theta+1}}, \forall\gamma > 0, \text{ vale resaltar que } \tfrac{n}{\gamma^{n\theta+1}} \neq 0\\
&\Rightarrow \quad g(\gamma) = 0, \forall\gamma > 0\\
&\Rightarrow \quad g(t) = 0, \forall t > 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $T = X_{(1)}$ é completa suficiente para $\mathcal{P}$, com θ conhecido na distribuição Pareto(θ, γ)

Por fim, queremos encontrar $\delta(T)$ tal que $E_\theta(\delta(T)) = \gamma,\ \forall\gamma > 0$. Então, $\delta(T)$ será o ENVVUM para θ, considerando θ conhecido.

$$
\begin{aligned}
E_\gamma[\delta(T)] = &\quad \int_\gamma^\infty \delta(t)\frac{n\theta\gamma^{n\theta}}{t^{n\theta+1}} dt = \gamma, \forall\gamma > 0\\
\Rightarrow &\quad \int_\gamma^\infty \delta(t)\frac{1}{t^{n\theta+1}} dt = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma > 0\\
\overset{TFC}{\Rightarrow} &\quad \lim_{y\to\infty} G(y) - G(\gamma) = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma > 0, \text{onde } G(t) \text{é a antiderivada de } g(t) = \frac{\delta(t)}{t^{n\theta+1}}\\
\Rightarrow &\ \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\cancel{\lim_{y\to\infty} G(y)}\right]^{0} - \frac{\partial}{\partial\gamma} G(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}\right], \forall\gamma > 0\\
\Rightarrow &\quad -g(\gamma) = \frac{(1-n\theta)\gamma^{1-n\theta-1}}{n\theta},\ \forall\theta > 0\\
\Rightarrow &\ -\delta(\gamma)\gamma^{-(n\theta+1)} = -\frac{(n\theta-1)}{n\theta}\gamma^{-n\theta},\ \forall\theta > 0\\
\Rightarrow &\ \delta(\gamma) = \frac{n\theta-1}{n\theta}\gamma^{n\theta+1-n\theta},\ \forall\theta > 0\\
\Rightarrow &\ \delta(t) = \frac{n\theta-1}{n\theta}t,\ \forall t > 0\\
\Rightarrow &\quad \delta(T) = \frac{n\theta-1}{n\theta}T \quad (q.c.\mathcal{P})
\end{aligned}
$$

Portanto,$\delta(X_{(1)}) = \frac{n\theta-1}{n\theta}X_{(1)}$ é o ENVVUM para γ com θ conhecido para uma família Pareto $(n\theta, \gamma)$, se $n\theta > 1$.

d) Suponha que θ seja conhecido e que o espaço paramétrico para γ seja reduzido a $(0, 1]$. Mostre que$X(1) = min(X_1, ..., X_n)$ é uma estatıstica suficiente mas não é completa.

Resolução

Considere o espaço paramétrico $\Omega_0 = (0, 1]$com θ fixo. Seja $\mathcal{P}_0 = \{P_\gamma, \gamma \in (0, 1]\}$, representando a família de distribuições do vetor aleatório $\boldsymbol{X} = X_1, \ldots, X_n$, iid, tal que $\mathcal{P}_0$ é um subconjunto de $\mathcal{P}$, com a respectiva função de densidade conjunta.

$$
\begin{aligned}
p_\gamma(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \theta\gamma^\theta x_i^{-(\theta+1)} I_{[\gamma,\infty)}\left(x_i\right), \theta>0, \gamma\in(0,1] \\
&= \gamma^{\theta n}\prod_{i=1}^{n} I_{[\gamma,\infty)}\left(x_i\right)\left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right], \theta>0, \gamma\in(0,1] \\
&= \gamma^{\theta n} I_{(X_1\geq\gamma)}...I_{(X_n\geq\gamma)}\left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right], \theta>0, \gamma\in(0,1] \\
&= \gamma^{\theta n} I_{\{\min(X_1,\ldots,X_n)\geq\gamma\}}\left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right], \theta>0, \gamma\in(0,1] \\
&= \underbrace{\gamma^{\theta n} I_{[\gamma,\infty)}\left(x_{(1)}\right)}_{g_\gamma(T(\boldsymbol{x}))}\underbrace{\left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right]}_{h(\boldsymbol{x})}, \theta>0, \gamma\in(0,1]
\end{aligned}
$$

Pelo Critério da Fatoração, como $g_\gamma(T(\boldsymbol{x})) = \gamma^{\theta n} I_{(\gamma,\infty)}\left(x_{(1)}\right)$ e $h(\boldsymbol{x}) = \left[\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}\right]$ são funções não negativas, a estatística $T = X_{(1)}$ é suficiente para a família de distribuições de X ($\mathcal{P}_0$), com θ conhecido .

Pelo item anterior a estatística $T = X_{(1)} \sim \text{Pareto}(n\theta, \gamma)$ é completa se, para qualquer função $g(T)$, $E_\gamma[g(T)] = 0, \forall\gamma \in (0,1]$, implicar que $g(T) = 0$ quase certamente $\mathcal{P}_0$, com θ conhecido.

$$
\begin{aligned}
E_\gamma[g(T)] &= \int_\gamma^\infty g(t) f_T(t)dt = 0, \forall\gamma\in(0,1] \\
&\Rightarrow \int_\gamma^\infty g(t)\frac{n\theta\gamma^{n\theta}}{t^{n\theta+1}}dt = 0, \forall\gamma\in(0,1] \\
&\Rightarrow \int_\gamma^\infty g(t)\frac{1}{t^{n\theta+1}}dt = 0, \forall\gamma\in(0,1] \\
&\Rightarrow \quad H(\gamma) - H(0) = 0, \forall\gamma\in(0,1], \text{onde } H(t) \text{ representa a primitiva de } h(t) = g(t)\frac{1}{t^{n\theta+1}}dt \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[H(\gamma)\right] - \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[H(0)\right] = \frac{\partial}{\partial\gamma}[0] \\
&\Rightarrow \quad H'(\gamma) = H'(0), \forall\gamma\in(0,1] \\
&\Rightarrow \quad g(\gamma)\gamma^{-1-n\theta} = 0, \forall\gamma\in(0,1], \text{ com } \gamma^{-1-n\theta} \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad g(\gamma) = 0, \forall\gamma\in(0,1] \\
&\Rightarrow \quad g(t) = 0, \forall t\in(0,1]
\end{aligned}
$$

No entanto, para algum $t > 0$, temos que $g(t) \neq 0$. Como exemplo, tem-se

$$
g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t\in(0,\gamma] \\ \frac{t^{n\theta-1}}{2} - t^{n\theta-2}, & \text{se } t\in(\gamma,\infty) \end{cases}.
$$

como $\gamma \in (0,1]$ e $n\theta > 2$, então $t \in (0,1]$, e podemos reescrever g da seguinte forma

$$
g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t\in(0,1] \\ \frac{t^{n\theta-1}}{2} - t^{n\theta-2}, & \text{se } t\in(1,\infty) \end{cases}.
$$

Note que, $\forall\gamma \in (0,1]$,

$$
\begin{aligned}
E_\gamma[f(T)] &= \int_0^1 0dt + \int_1^\infty \left(\frac{t^{n\theta-1}}{2} - t^{n\theta-2}\right) t^{-1-n\theta}dt \\
&= \int_1^\infty \frac{t^{-2}}{2}dt - \int_1^\infty t^{-3}dt = -\left.\frac{1}{2}\frac{1}{t}\right|_1^\infty + \left.\frac{1}{2t^2}\right|_1^\infty \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $E_\gamma[f(T)] = 0, \forall\gamma \in (0,1]$, mas $f(T)$ não é igual a zero com probabilidade 1, isto é, $P_\gamma(f(T) \neq 0) > 0$. Assim, $T = X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ não é estatística completa para $\gamma \in (0,1]$, mas é suficiente.

e) Suponha que θ seja conhecido e que o espaço paramétrico para γ seja reduzido a $(0,1]$. Obtenha o estimador não viciado de variância uniformemente mınima de γ. Sugestão: Considere estimadores da forma $h(X_{(1)}) = aX_{(1)}\mathbb{I}_{(0,1]}(X_{(1)}) + b\mathbb{I}_{(1,+\infty)}(X_{(1)})$ e mostre que são não correlacionados com estimadores não viciados de zero.

Resolução

Seja $\gamma \in (0,1]$ e θ fixo. Seja o estimador na forma

$$h(T) = aT\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + b\mathbb{I}_{(1,\infty)}(T)$$

com a e b constantes. Vamos encontrar os valores de a e b de forma que $h(T)$ seja estimador não viciado para γ, isto é,

$$\begin{aligned}
&E_\gamma[h(T)] = \gamma, \quad \forall\gamma \in (0,1].\\
&\Rightarrow \int_\gamma^\infty h(t)f_T(t)dt = \gamma, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow \quad \int_\gamma^\infty h(t)\frac{n\theta\gamma^{n\theta}}{t^{n\theta+1}}dt = \gamma, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow \int_\gamma^\infty h(t)t^{-1-n\theta}dt = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow \int_\gamma^\infty (at)t^{-1-n\theta}\mathbb{I}_{(0,1]}(t)dt + \int_\gamma^\infty bt^{-1-n\theta}\mathbb{I}_{(1,\infty)}(t)dt = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow \int_\gamma^1 at^{-n\theta}dt + \int_1^\infty bt^{-1-n\theta}dt = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow a\frac{t^{1-n\theta}}{1-n\theta}\bigg|_\gamma^1 - b\frac{t^{-n\theta}}{n\theta}\bigg|_1^\infty = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow a\frac{1}{1-n\theta} - a\frac{\gamma^{1-n\theta}}{1-n\theta} + b\frac{1}{n\theta} = \frac{\gamma^{1-n\theta}}{n\theta}, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow -a\frac{1}{1-n\theta} = \frac{1}{n\theta} \text{ e } a\frac{1}{1-n\theta} = -b\frac{1}{n\theta}, \forall\gamma \in (0,1]\\
&\Rightarrow a = \frac{n\theta - 1}{n\theta} \text{ e } b = 1, \forall\gamma \in (0,1].
\end{aligned}$$

Logo,

$$h(T) = \frac{n\theta - 1}{n\theta}T\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + \mathbb{I}_{(1,\infty)}(T)$$

é ENVVUM para γ tal que $\gamma \in (0,1]$.

Considere $\mathcal{U}_T$ como um subconjunto de $\mathcal{U} = \left\{U(\boldsymbol{X}) : E_\gamma[U(\boldsymbol{X})] = 0 \text{ e } E_\gamma\left[U^2(\boldsymbol{X})\right] < \infty, \forall\gamma \in (0,1]\right\}$, formado por estimadores não viesados de zero que dependem apenas da estatística suficiente T para γ. Assim, dado que $U \in \mathcal{U}_T$,

$$E_\gamma[U(T)] = 0, \forall\gamma \in (0,1].$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & E_\gamma[U(T)] = \int_\gamma^\infty u(t)f_T(t)dt = 0, \forall\gamma \in (0,1]\\
\Rightarrow \quad & \int_\gamma^1 u(t)f_T(t)dt + \int_1^\infty u(t)f_T(t)dt = 0, \forall\gamma \in (0,1]
\end{aligned}$$

Logo, como $\gamma \in (0,1]$ então de $\int_\gamma^1 u(t) f_T(t) dt$, para $t<1$, temos que $u(t)=0$. Assim, temos que:

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 < t \leq 1 \\ u^*(t), \text{ se } t > 1 \end{cases}$$

com $\int_1^\infty u^*(t) f_T(t) dt = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
E_\gamma[h(T)U(T)] =& E_\gamma\left[E_\gamma(h(T)U(T))\mathbb{I}_{(0,1]}(T)\right], \forall \gamma \in (0,1] \\
=& E_\gamma\left[E_\gamma\left[\left(\frac{n\theta-1}{n\theta}T\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + \mathbb{I}_{(1,\infty)}(T)\right)U^*(T)\mathbb{I}_{(1,\infty)}(T)\right]\Bigg| \mathbb{I}_{(0,1]}(T)\right], \forall \gamma \in (0,1] \\
& E_\gamma\left[E_\gamma\left[\left(\frac{n\theta-1}{n\theta}T\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + \left(1-\mathbb{I}_{[0,1)}(T)\right)\right)U^*(T)\left[1-\mathbb{I}_{(0,1]}(T)\right]\right]\Bigg| \mathbb{I}_{(0,1]}(T)\right], \forall \gamma \in (0,1] \\
\\
=& E_\gamma\left[\left(\frac{n\theta-1}{n\theta}T\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + \left(1-\mathbb{I}_{[0,1)}(T)\right)\right)U^*(T)\left[1-\mathbb{I}_{(0,1]}(T)\right]\mathbb{I}_{(0,1]}(T) = 0\right] P(T>1) + \\
& + E_\gamma\left[\left(\frac{n\theta-1}{n\theta}T\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + \left(1-\mathbb{I}_{[0,1)}(T)\right)\right)U^*(T)\left[1-\mathbb{I}_{(0,1]}(T)\right]\Bigg| \mathbb{I}_{(0,1]}(T) = 1\right] P(T\leq 1) \\
=& E_\gamma\left[\left(\frac{n\theta-1}{n\theta}T\cdot 0 + (1-0)\right)U^*(T)[1-0]\right] P(T>1) + \\
& + E_\gamma\left[\left(\frac{n\theta-1}{n\theta}T\cdot 1 + (1-1)\right)U^*(T)[1-1]\right] P(T\leq 1), \forall \gamma \in (0,1] \\
=& E_\gamma\left[U^*(T)\right] P(T>1) + E_\gamma[0] P(T\leq 1), \forall \gamma \in (0,1] \\
=& 0, \forall \gamma \in (0,1] \quad \text{e} \quad U \in \mathcal{U}_T.
\end{aligned}$$

Como $E_\gamma[U(T)] = 0$ e $E_\gamma[h(T)] = \gamma$ para todo $\gamma > 0$, a condição $E_\gamma[h(T)U(T)] = 0$ para $\gamma \in (0,1]$ e$U \in \mathcal{U}_T$ é tanto necessária quanto suficiente para que $h(T) = \frac{n\theta-1}{n\theta}T\mathbb{I}_{(0,1]}(T) + \mathbb{I}_{(1,\infty)}(T)$ seja o ENVVUM de γ. Além disso, essa condição também implica que $h(T)$ é não correlacionado com qualquer $U \in \mathcal{U}_T$.