UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Programa de Post-Graduação em Estatística

Katerine Zuniga Lastra, Marília de Melo Sombra, Alex Monito Nhancololo

Lista 02 – Semestre de 2024-II – Prof. Silvia Ferrari

3) Suponha que $X \sim$ Poisson (λ), $\lambda > 0$, e que $Y|X = x \sim$ Poisson $(x\lambda)$. Considere o problema de estimar λ com base em (X, Y).

(a) Mostre que (X, Y) é uma estatística suficiente minimal para λ, mas não é completa.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{se } x = 1, 2, \ldots \\ e^{-\lambda} & \text{se } x = 0 \end{cases}, \text{ e } f(y|x) = \begin{cases} \frac{(x\lambda)^y e^{-x\lambda}}{y!}, & \text{se } x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &\overset{ind}{=} f(x) \times f(y|x) \\ &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \times \frac{(x\lambda)^y e^{-x\lambda}}{y!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x, y) + e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) \\ &= \frac{\lambda^{x+y} e^{-\lambda(1+x)} x^y}{x! y!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x, y) + e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) \\ &= \underbrace{e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y} e^{-\lambda(1+x)}}_{g_\lambda(T(x,y))} \underbrace{\frac{x^y}{x! y!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x, y)}_{h(x,y)} \end{aligned}$$

$g_\lambda[T(x, y)]$ é função de λ e X, Y, apenas, logo, $T(X, Y) = (X, Y)$ é suficiente.

Sejam (x, y) e $(x^{'}, y^{'})$ pontos amostrais do espaço amostral χ.

$T(x, y) = T(x^{'}, y^{'}) \iff (x^{'}, y^{'}) \in D(x, y)$:

$$D(x, y) = \{(x^{'}, y^{'}) \in \chi : P(x', y') = P(x, y) \cdot h(x, y; x^{'}, y^{'}), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, h(x, y; x^{'}, y^{'}) > 0\}$$

$$P(x^{'}, y^{'}) = e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x'=0\}}(y') + \lambda^{x'+y'} e^{-\lambda(1+x')} \frac{(x')^{y'}}{x'! y'!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x', y')$$

Caso 1) $\Longrightarrow$

$$T(x, y) = T(x^{'}, y^{'}) \Longrightarrow (x, y) = (x^{'}, y^{'})$$

$$\begin{aligned} P(x^{'}, y^{'}) &= e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x'=0\}}(y') + \lambda^{x'+y'} e^{-\lambda(1+x')} \frac{(x')^{y'}}{x'! y'!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x', y') \\ &= e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y} e^{-\lambda(1+x)} \frac{(x)^y}{x! y!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x, y) \cdot h(x, y; x^{'}, y^{'}), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ &= e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y} e^{-\lambda(1+x)} \frac{(x)^y}{x! y!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x, y) \cdot 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, h(x, y; x^{'}, y^{'}) = 1 \\ &= e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y} e^{-\lambda(1+x)} \frac{(x)^y}{x! y!} \mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x, y) \\ & (x^{'}, y^{'}) \in D(x, y) \end{aligned}$$

Caso 2) $\Longleftarrow$

$$\begin{aligned} (x^{'}, y^{'}) \in D(x, y) &\Longrightarrow P(x', y') = P(x, y) \cdot h(x, y; x^{'}, y^{'}), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, h(x, y; x^{'}, y^{'}) > 0 \\ P(x', y') &= P(x, y) \cdot 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

$$P(x',y') = P(x,y)\cdot 1,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+$$
$$e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x'=0\}}(y') + \lambda^{x'+y'}e^{-\lambda(1+x')}\frac{(x')^{y'}}{x'!y'!}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x',y') = e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y}e^{-\lambda(1+x)}\frac{(x)^{y}}{x!y!}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x,y)\cdot 1$$
$$e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x'=0\}}(y') + \lambda^{x'+y'}e^{-\lambda(1+x')}\frac{(x')^{y'}}{x'!y'!}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x',y') = e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y}e^{-\lambda(1+x)}\frac{(x)^{y}}{x!y!}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x,y)$$

$(x',y') = (x,y),$ pelo princípio de semelhança de termos , e $x = x', y = y'$, por se tratar de par ordenado.

Se $(x,y) \neq (x',y')$, não se observa a proporcionalidade entre $P(x',y')$ e $P(x,y)$

$$\implies T(X,Y) = T(X',Y')$$

Portanto, pelo Teorema de Schervish, a estatística $T(X,Y) = (X,Y)$ é suficiente minimal para λ.

$\implies$Mostrando que $T(X,Y)$ não completa

Seja, $g(T)]$ função da estatística suficiente minimal $T(X,Y)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(T)] &= 0, \forall\lambda > 0\\
P[g(T) = 0] &\neq 1\\
\mathbb{E}[g(T)] &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} g(T)\left[e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y}e^{-\lambda(1+x)}\frac{(x)^y}{x!y!}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x,y)\right]\\
\mathbb{E}[g(T)] &= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\sum_{x=0}^{a}\sum_{y=0}^{b} g(T)\left[e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\times\frac{(x\lambda)^y e^{-x\lambda}}{y!}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(x,y)\right]\\
\mathbb{E}[g(T)] &= 0
\end{aligned}$$

O limite convirgirá para zero pois os termos do denominador serão maiores que os do numerador quando $a \to \infty$ e $b \to \infty$. No entando não necessariamente significa que $g(T) = 0$.

Contraexemplo

$$\begin{aligned}
g(T) &= X^2 - X - Y\\
\mathbb{E}[g(T)] &= \mathbb{E}[X^2 - X - Y]\\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]\\
&= \mathrm{Var}_\lambda(X) + (\mathbb{E}[X])^2 - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]\\
\text{Na distribuição Poisson } Var(\cdot) &= \bar{(\cdot)}\\
\mathbb{E}[g(T)] &= \lambda + \lambda^2 - \lambda - \mathbb{E}[X\lambda]\\
&= \lambda^2 - \lambda\mathbb{E}[X]\\
&= \lambda^2 - \lambda\cdot\lambda,\ \forall\lambda > 0\\
&= 0,\ \text{mas } g(T) \neq 0\\
\mathbb{E}[g(T)] &= 0\\
P[g(T) = 0] &\neq 1
\end{aligned}$$

(b) Obtenha o limite inferior de Cramér-Rao para a variância de estimadores não viciados de λ e compare com a variância de X, que é um estimador não viciado de λ.

$$\text{LICR} = \frac{(\frac{d}{d\lambda}\lambda)^2}{I(\lambda)} = \frac{1}{I(\lambda)}$$
$$I(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\log(P(X,Y))\right]$$

Assumindo existência da segunda derivada do log da função e válidas todas condições de regularidade.

$$
\begin{aligned}
P(X,Y) &= e^{-\lambda}\mathbb{I}_{\{x=0\}}(y) + \lambda^{x+y}e^{-\lambda(1+x)}\frac{(x)^y}{x!y!}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x,y) \\
\log(P(X,Y)) &= -\lambda\mathbb{I}_{\{x=0\}} + \left[(x+y)\log(\lambda) - \lambda(1+x) + y\log(x) - \log(x!y!)\right]\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x,y) \\
\frac{d}{d\lambda}\log(P(x,y)) &= -1\mathbb{I}_{\{x=0\}} + \left[\frac{x+y}{\lambda} - (1+x)\right]\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x,y),\ \lambda > 0 \\
\frac{d^2}{d\lambda^2}\log(P(x,y)) &= -\frac{x+y}{\lambda^2}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x,y),\ \lambda > 0(**) \\
I(\lambda) &= -\mathbb{E}\left[-\frac{X+Y}{\lambda^2}\right] \\
I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) \\
I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda + \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]) \\
I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda + \mathbb{E}[X\lambda) \\
I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda + \lambda\mathbb{E}[X]) \\
I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}(\lambda + \lambda\cdot\lambda) \\
I(\lambda) &= \frac{1+\lambda}{\lambda}, \lambda > 0 \\
\text{LICR} &= \frac{1}{I(\lambda)} \\
\text{LICR} &= \frac{1}{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\
&\begin{cases} \text{LICR} & = \frac{\lambda}{1+\lambda} \\ \text{Var(X)} & = \lambda \end{cases} \implies \text{LICR} \neq \text{Var(X)}, \lambda > 0
\end{aligned}
$$

(c) Encontre o estimador de máxima verossimilhaça de λ e obtenha seu viés.

Resolução

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\log L(\lambda; x, y) &= \left[\frac{x+y}{\lambda} - (1+x)\right]\mathbb{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x,y),\ \lambda > 0 \\
\frac{d^2}{d\lambda^2}\log(P(x,y)) &= -\frac{x+y}{\lambda^2}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x,y) < 0,\ \lambda > 0\ (**) \\
\frac{d}{d\lambda}\log L(\lambda; x, y) &= 0 \\
\left[\frac{x+y}{\lambda} - (1+x)\right]\mathbb{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x,y) &= 0,\ \lambda > 0 \\
\frac{x+y}{\lambda} &= (1+x)\mathbb{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x,y),\ \lambda > 0 \\
x+y &= (1+x)\lambda\mathbb{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x,y),\ \lambda > 0 \\
\hat{\lambda} &= \frac{x+y}{1+x}\mathbb{I}_{\{0,1,2,\dots\}}(x,y),\ \lambda > 0 \\
\hat{\lambda}_{MV} &= \frac{X+Y}{1+X},\ \text{pois},\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\log(P(x,y)) < 0
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Viés do estimador

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\lambda}_{MV} - \lambda] &= \mathbb{E}[\hat{\lambda}_{MV}] - \lambda \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] - \lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{x+y}{1+x} f(x,y|x) \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} f(x,y|x) + \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{y}{1+x} f(x,y|x) \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} f(x)f(y|x) + \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{y}{1+x} f(x)f(y|x) \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} f(x) \sum_{y=0}^{\infty} f(y|x) + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{1+x} f(x) \sum_{y=0}^{\infty} y f(y|x) \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} f(x) \cancelto{1}{\sum_{y=0}^{\infty} f(y|x)} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{1+x} f(x) \cancelto{\mathbb{E}(y|x)}{\sum_{y=0}^{\infty} y f(y|x)}, \quad f(y|x) \text{ é função de prob.} \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} f(x) + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda x}{1+x} f(x) \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} \left[\frac{x}{1+x} f(x) + \frac{\lambda x}{1+x} f(x)\right] \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} f(x) \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{1+x} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\lambda^x e^{-\lambda}}{(1+x)!}, \text{ seja } x+1 = a, \text{ se } x = 0, a = 1 \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \sum_{a=1}^{\infty} \frac{(a-1)\lambda^{a-1} e^{-\lambda}}{a!} \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \left[\sum_{a=1}^{\infty} \frac{a\lambda^{a-1} e^{-\lambda}}{a!} - \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\lambda^{a-1} e^{-\lambda}}{a!}\right] \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \left[\frac{1}{\lambda}\sum_{a=0}^{\infty} \frac{a\lambda^{a} e^{-\lambda}}{a!} - \frac{1}{\lambda}\sum_{a=1}^{\infty} \frac{\lambda^{a} e^{-\lambda}}{a!}\right] \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= (1+\lambda) \left[\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(a) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}\right)\right], \quad \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^a e^{-\lambda}}{a!} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\lambda^a e^{-\lambda}}{a!} = 1 \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \frac{1+\lambda}{\lambda} \left[\mathbb{E}(a) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right] \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \frac{1+\lambda}{\lambda} \left[\lambda - \left(1 - e^{-\lambda}\right)\right] \\
\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] &= \frac{1+\lambda}{\lambda} \left[\lambda - 1 + e^{-\lambda}\right]
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left[\lambda - 1 + e^{-\lambda}\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}_{MV}\right] - \lambda = \mathbb{E}\left[\frac{X+Y}{1+X}\right] - \lambda$$
$$\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}_{MV}\right] - \lambda = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(\lambda - 1 + e^{-\lambda}\right) - \lambda$$

Assim, o viés de do estimador $\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}_{MV}\right]$ é $\frac{1+\lambda}{\lambda}\left(\lambda - 1 + e^{-\lambda}\right) - \lambda$.

Questão 4 Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica e função de probabilidade $P_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^x$, $x = 0, 1, \ldots$. Qual é a menor variância possível para um estimador não viciado de θ (baseado em uma única observação)? Compare essa variância com o limite inferior de Cramér-Rao.
Um possível estimador não viciado de θ pode ser definido como $\delta(X) = X$, em que $E_\theta(\delta(X)) = \theta$, $\forall \theta \in (0, 1)$. Observe que a densidade de X pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p_\theta(x) &= \theta(1-\theta)^x I_{\{0,\ldots,\infty\}}(x) \\ &= \exp\{x \log(1-\theta) + log(\theta)\} I_{\{0,\ldots,\infty\}}(x) \\ &= \exp\{T(x)\eta(\theta) - B(\theta)\} h(x) \end{aligned}$$

em que $\eta(\theta) = \log(1-\theta)$, $T(X) = X$, $B(\theta) = -log(\theta)$ e $h(x) = I_{\{0,\ldots,\infty\}}(x)$. Como o espaço paramétrico de $\eta(\theta) \in (-\infty, 0)$ contém retângulos unidimensionais abertos, a família é de posto completo, logo, a estatística $T(X) = X$ é suficiente e completa. Assim, como $\delta(X) = X$ é não viciado e função de uma estatística suficiente e completa, então, $\delta(X)$ é ENVVUM para θ.
Para calcular a variância do estimador, temos que

$$Var_\theta(\delta(X)) = E_\theta[\delta(X)^2] - E_\theta^2[\delta(X)] = \theta(1-\theta)^0 + [\theta(1-\theta)^0]^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta)$$

Para calcular o Limite Inferior de Cramér-Rao(LICR), temos
A função de verossimilhança é dada por:
$$L(\theta, x) = \theta(1-\theta)^x$$

A função de log-verossimilhança é dada por

$$l(\theta, x) = \log(\theta) + x\log(1-\theta)$$

A primeira derivada da função de log-verossimilhança é

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, x) = \frac{1}{\theta} - \frac{x}{1-\theta}$$

A derivada segunda da função de log-verossimilhança é

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta, x) = -\frac{1}{\theta^2} - \frac{x}{(1-\theta)^2}$$

Assim, a informação de Fisher para θ é dada por

$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta, x)\right] = \frac{1}{\theta^2} + \frac{E_\theta[X]}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{(1-\theta)}{\theta(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta(1-\theta)} = \frac{(1-\theta)+\theta}{\theta^2(1-\theta)} = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)}$$

Logo, o LICR é dado por
$$LICR = \frac{1}{I(\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\theta^2(1-\theta)}} = \theta^2(1-\theta)$$

Portanto, observamos que $Var_\theta = \theta(1-\theta) > \theta^2(1-\theta)$, $\forall \theta \in (0, 1)$.

14. Seja $\mathcal{F}$ a classe das densidades de parâmetro $\theta(\theta > 0)$ com média $1/\theta$ e variância $1/\theta^2$ e que satisfazem as condições para a validade da desigualdade da informação.

(a) Mostre que uma densidade que minimiza a informação de Fisher para θ na classe $\mathcal{F}$ é $f(x;\theta) = \theta\exp\{-\theta x\}I_{(0,\infty)}(x)$. Sugestão: use a desigualdade da informação.

Seja X uma variável aleatória tal que X tem distribuição P_θ, em que $P_0 \in \mathcal{F}$ então, $E[x] = \frac{1}{\theta}$ e $\text{Var}(x) = \frac{1}{\theta^2}$. Seja $\delta(x) = x$, então usando o teorema de desigualdade da informação;

$$\text{Var}(X) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}E[X]\right)^2}{I(\theta)},$$

onde $I(\theta)$ é a informação de Fisher.

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(x) \geqslant \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}E(x)\right]^2}{I(\theta)} \Leftrightarrow \frac{1}{\theta^2} \geqslant \frac{\left[-\frac{1}{\theta^2}\right]^2}{I(\theta)} = \frac{\frac{1}{\theta^4}}{I(\theta)}\\
&\Rightarrow \quad I(\theta) \geqslant \frac{1}{\theta^2}
\end{aligned}$$

Agora, devemos verificar se a densidade sugerida minimiza a informação de Fisher.
Assim, Desigualdade da Informação de Fisher e dada como

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]$$

Assim temos que se a densidade é

$$\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \theta\exp\{-\theta x\}I_{(0,\infty)}(x)\\
\log f(x;\theta) &= \log\theta - \theta x.\\
\frac{\partial \log(x;\theta)}{\partial\theta} &= \frac{1}{\theta} - x.\\
\frac{\partial^2 \log f(x,\theta)}{\partial\theta^2} &= -\frac{1}{\theta^2}
\end{aligned}$$

Logo

$$I(\theta) = -E\left[-\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2}$$

é miníma na classe $\mathcal{F}$

(b) Considere a distribuição $N(1/\theta, 1/\theta^2)$ e encontre o LICR (limite inferior de Cramer-Rao para variâncias de estimadores não viciados de $g(\theta)$). Compare-o com o correspondente LICR para a distribuição exponencial.

Considere a distribuição $N\left(1/\theta, 1/\theta^2\right), \quad \theta > 0$. A densidade de probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned}
p_\theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\theta^2}}}\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left(x - \frac{1}{\theta}\right)^2\right\}.\\
\log p_\theta(x) &= -\frac{\theta^2}{2}\left(x^2 - 2\frac{x}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\right) - \frac{1}{2}\log(2\pi) + \log\theta\\
\log p_\theta(x) &= -\frac{\theta^2 x^2}{2} + \theta x - \frac{1}{2} - \log(2\pi) + \log\theta\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(x) &= -\theta x^2 + x + \frac{1}{\theta}.\\
\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p_\theta(x) &= -x^2 - \frac{1}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p_\theta(x)\right].$$

Então;

$$I(\theta) = -E\left[-x^2 - \frac{1}{\theta^2}\right] = E\left[x^2\right] + \frac{1}{\theta^2}$$

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -E\left[-x^2 - \frac{1}{\theta^2}\right] = E\left[x^2\right] + \frac{1}{\theta^2} \\ &= \mathrm{Var}[x] + (E\left[x\right])^2 + \frac{1}{\theta^2} \\ &= \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{3}{\theta^2} \end{aligned}$$

A fórmula do Limite Inferior de Cramer-Rao (LICR) para variâncias de estimadores não-viesados é dada por:

$$LICR = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}E(x)\right]^2}{I(\theta)}$$

Então

$$LICR = \frac{\frac{1}{\theta^4}}{\frac{3}{\theta^2}} = \frac{1}{3\theta^2}$$

Por outro lado, para o caso da distribuição exponencial no item (a), o LICR foi dado por:

$$LICR_a = \frac{\frac{1}{\theta^4}}{\frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}$$

Portanto, comparando os dois resultados, o LICR para a distribuição normal $N\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta^2}\right)$ é $\frac{1}{3\theta^2}$, enquanto o LICR para a distribuição exponencial é $\frac{1}{\theta^2}$. Logo, o LICR da distribuição exponencial é maior do que o da distribuição normal.

Como $I(\theta)$ da distribuição exponencial minimiza a informação de Fisher dentro da classe $\mathcal{F}$, o LICR correspondente será o máximo dentro dessa classe.

22. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de X, que tem distribuição seminormal com função densidade de probabilidade

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{[\xi,+\infty)}(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(a) Obtenha uma estatística suficiente minimal para ξ.

Resolução

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{[\xi,+\infty)}(x), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$f(x;\xi) \overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x_i-\xi)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{\xi \le x < \infty\}}(x), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\xi)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{X_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x)$$

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - 2x_i\xi + \xi^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{X_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x)$$

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{X_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x)$$

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{X_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x), \quad (*)$$

$$f(x;\xi) = \underbrace{e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{X_{(1)} \ge \xi\}}(x)}_{g_\xi[T(x)]} \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} \mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x)}_{h(x)}$$

$g_\xi[T(x)]$ é função de ξ e X, apenas, pela estatística, $T(X)$ e $h(x) \ge 0$, logo,
$T(X) = (\sum_{i=1}^n x_i, X_{(1)}) = (\sum_{i=1}^n x_i, X_{(1)})$ é estatística suficiente para ξ.
$\Longrightarrow$ Verificando a suficiência minimal
Sejam x, y pontos amostrais do espaço amostral χ.
$T(x) = T(y) \iff y \in D(x)$:

$$D(x) = \{y \in \chi : P(y) = P(x) \cdot h(x,y), \forall \xi \in \mathbb{R}, h(x,y) > 0\}$$

Caso 1) $\Longrightarrow$

$$T(x) = T(y) \Longrightarrow \left(x_{(1)}, \sum_{i=1}^n x_i\right) = \left(y_{(1)}, \sum_{i=1}^n y_i\right)$$

$$P(y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \ge \xi\}}(y)\mathbb{I}_{\{y_{(n)} < \infty\}}(y)$$

$$P(y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \frac{e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i}}{e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i}} \frac{e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}}{e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \ge \xi\}}(y)\mathbb{I}_{\{y_{(n)} < \infty\}}(y) \times$$
$$\times \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x)$$

$$P(y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i - \xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} \times$$
$$\times \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \ge \xi\}}(y)\mathbb{I}_{\{y_{(n)} < \infty\}}(y)\mathbb{I}_{\{x_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x)$$

$$P(y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi\left(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i\right)} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} \times$$
$$\times \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \ge \xi\}}(y)\mathbb{I}_{\{y_{(n)} < \infty\}}(y)\mathbb{I}_{\{x_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x)$$

$$P(y) = \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \ge \xi\}}(x)\mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x)}_{P(x)} h(x,y)$$

$$h(x,y) = e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi\left(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i\right)} \times \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \ge \xi\}}(y)\mathbb{I}_{\{y_{(n)} < \infty\}}(y)$$

$$P(y) = P(x)h(x,y)$$

$$y \in D(x)$$

Caso 2) $\Longleftarrow$

$$y \in D(x)$$
$$P(y) = P(x) \cdot h(x,y), \forall \xi \in \mathbb{R}, h(x,y) > 0$$
$$P(y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) \mathbb{I}_{\{y_{(n)} < \infty\}}(y)$$
$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x) \mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x) h(x,y), h(x,y) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x), \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Caso a) Supondo que $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i$ e $y_{(1)} \neq x_{(1)}, \forall \xi \in \mathbb{R}$

$$e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x), \forall \xi \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) = \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x), \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Assim, se $y_{(1)} < x_{(1)} \Longrightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} : y_{(1)} < \xi < x_{(1)}$ logo, $\mathbb{I}_{\{y_{(1)}\}} = 0$ e $\mathbb{I}_{\{x_{(1)}\}} = 1$ (Absurdo!)

Por outro lado, se $x_{(1)} < y_{(1)} \Longrightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} : x_{(1)} < \xi < y_{(1)}$ logo, $\mathbb{I}_{\{y_{(1)}\}} = 1$ e $\mathbb{I}_{\{x_{(1)}\}} = 0$ (Absurdo!)

A indicadora só assume dois valores 0 ou 1. Assim, sob condição $y_{(1)} < \xi < x_{(1)}$, ξ não teria um valor correspondente. Idem para $x_{(1)} < \xi < y_{(1)}$.

Logo, para que $e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x), \forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$y_{(1)} = x_{(1)}$$

Caso b): Supondo que $\sum_{i=1}^n y_i \neq \sum_{i=1}^n x_i$ e $y_{(1)} = x_{(1)}, \forall \xi \in \mathbb{R}$

$$e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x), \forall \xi \in \mathbb{R} \Longrightarrow e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i}, \forall \xi \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \frac{e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i}}{e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i}} = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i - \xi \sum_{i=1}^n x_i} = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow e^{\xi (\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i)} = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$$

O que só é possível se $\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i$

Caso c) Supondo que $\sum_{i=1}^n y_i \neq \sum_{i=1}^n x_i$ e $y_{(1)} \neq x_{(1)}, \forall \xi \in \mathbb{R}$

$e^{\xi \sum_{i=1}^n y_i} \mathbb{I}_{\{y_{(1)} \geq \xi\}}(y) = e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} \geq \xi\}}(x), \forall \xi \in \mathbb{R}$. Esta igualidade não se é satisfeita, pelas justificativas vistas em a) e b)

Logo, $\left(x_{(1)}, \sum_{i=1}^n x_i\right) = \left(y_{(1)}, \sum_{i=1}^n y_i\right)$ e

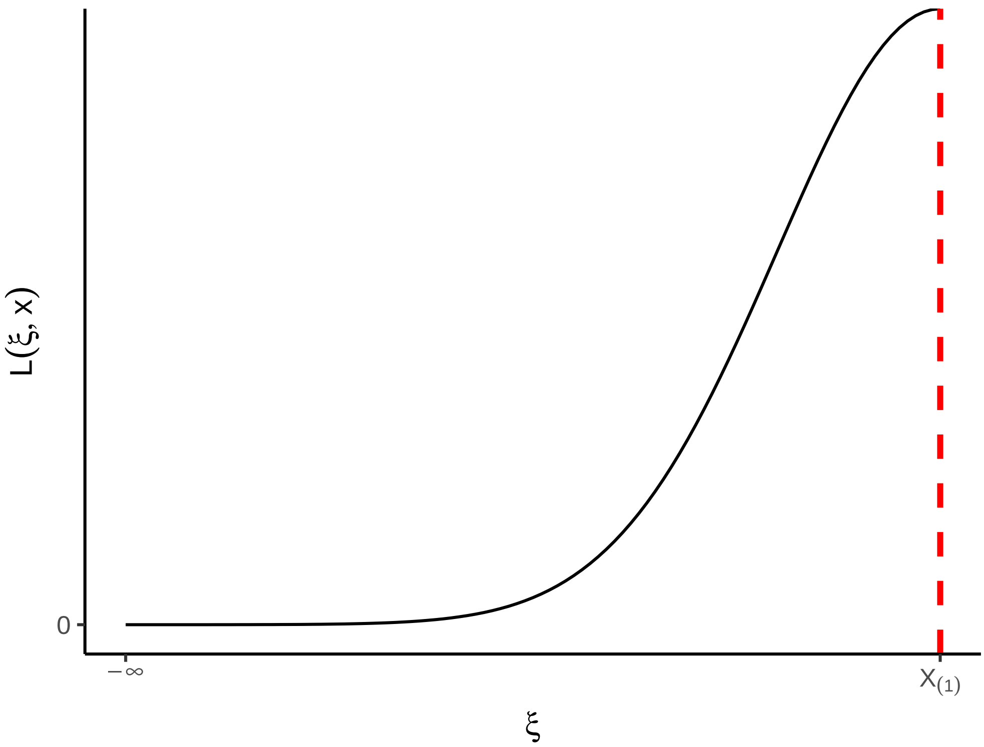
$$T(X) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, X_{(1)}\right),$$

é estatística suficiente minimal.

(b) Esboce a função de verossimilhança. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de ξ.

Resolução

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{X_{(1)} \geq \xi\}}(x) \mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x), \quad \text{visto no } (*)$$
$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}} e^{\xi \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \mathbb{I}_{\{\xi \leq X_{(1)}\}}(x) \mathbb{I}_{\{X_{(n)} < \infty\}}(x)$$
$$\xi \leq X_{(1)} \Longrightarrow \hat{\xi}_{MV} = X_{(1)}$$



(c) Encontre o estimador ERM (equivariante por localização de risco mínimo) de ξ sob perda quadrática.

Resolução

$$f(x_i;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x_i-\xi)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{\xi \le x < \infty\}}(x), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$f(x_i - u) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x_i-u)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{u \le x < \infty\}}(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1-u, x_2-u, \dots) \overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x_i-u)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{u \le x < \infty\}}(x)$$

$$f(x_1-u, x_2-u, \dots) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i-u)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{u \le x < \infty\}}(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1-u, x_2-u, \dots) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{u \le x < \infty\}}(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1-u, x_2-u, \dots) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\{u \le x < \infty\}}(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

$$T(x) = \frac{\int_{s(u)} u f(x_1-u, x_2-u, \dots) du}{\int_{s(u)} f(x_1-u, x_2-u, \dots) du}$$

$$T(x) = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} u \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} u \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}$$

Seja $y = \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\}$

$$\text{Seja } y = \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} (*)$$

$$\frac{dy}{du} = n(\bar{x}-\mu)\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\}$$

$$\frac{dy}{du} = n\bar{x}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} - n\mu\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\}$$

$$dy = \left[n\bar{x}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} - n\mu\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\}\right] du$$

$$dy = n\bar{x}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du - n\mu\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du$$

$$dy - n\bar{x}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du = -n\mu\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du$$

$$-\frac{1}{n}dy + \bar{x}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} = \mu\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du$$

$$T(x) = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} u\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} -\frac{1}{n}dy + \bar{x}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} -\frac{1}{n}dy}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du} + \frac{\bar{x}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\}}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} -\frac{1}{n}dy}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du} + \bar{x}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[-\sqrt{n}(\bar{x}-u)\right]^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[\sqrt{n}(-\bar{x}+u)\right]^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]^2}{2}\right\} du}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]^2}{2}\right\} d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]}$$

$$d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right] = \sqrt{n}du \Longrightarrow du = \frac{d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]}{\sqrt{n}}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]^2}{2}\right\} d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]}$$

$$d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right] = \sqrt{n}du \Longrightarrow du = \frac{d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]}{\sqrt{n}}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]^2}{2}\right\} d\left[\sqrt{n}(u-\bar{x})\right]}_{\text{fdp normal padrão para } \sqrt{n}(u-\bar{x})}}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{X_{(1)}} dy}{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\lim\limits_{a\to-\infty}\displaystyle\int_{a}^{X_{(1)}} dy}{\frac{n\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\lim\limits_{a\to-\infty} y\Big|_{a}^{X_{(1)}}}{\frac{n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}{n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\lim\limits_{a\to-\infty} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-u)^2}{2}\right\}\Big|_{a}^{X_{(1)}}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\lim\limits_{a\to-\infty} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-X_{(1)})^2}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-a)^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-X_{(1)})^2}{2}\right\} - \lim\limits_{a\to-\infty} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-a)^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-X_{(1)})^2}{2}\right\} - 0}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-X_{(1)})^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\exp\left\{-\frac{n[-(\bar{x}-X_{(1)})]^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\exp\left\{-\frac{n[-\bar{x}+X_{(1)})]^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}$$

$$T(x) = \bar{x} - \frac{\exp\left\{-\frac{n(X_{(1)}-\bar{x})^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi n}\Phi\left[\sqrt{n}(X_{(1)}-\bar{x})\right]}, \text{ que é estimador ERM de } \xi \text{ sob perda quadrática.}$$

Este estimador pode ser expresso de várias maneiras, trocando as posições dos termos $X_{(1)}$ e $\bar{x}$, devido ao grau (dois) que é par. No entando a troca não altera as suas estimativas.

25. Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial truncada e função densidade de probabilidade

$$p(x;\xi) = \frac{e^{-(x-\xi)/b}}{b(1-e^{-1/b})}, x \in [\xi, \xi+1]; -\infty < \xi < +\infty,$$

em que $b > 0$ é conhecido.

Seja $\mathcal{P} = \{P_\xi, \xi \in R\}$ a família de possíveis distribuições do vetor aleatório $X = (X_1, \ldots, X_n)$ com densidade conjunta

$$\begin{aligned}
p_\epsilon(\boldsymbol{x}) &= p_\epsilon(x_1, \ldots, x_n), \text{onde} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\
&\overset{ind.}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b\left(1-e^{-1/b}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{b}(x_i - \epsilon)\right\} I_{[\epsilon\epsilon\epsilon+1]}(x_i) \\
&= \left(\frac{1}{b\left(1-e^{-1/b}\right)}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\epsilon)\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\epsilon,\epsilon+1]}(x_i) \\
&= \frac{1}{b^n\left(1-e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\epsilon\right)\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\epsilon,\epsilon+1]}(x_i) \\
&= \frac{1}{b^n\left(1-e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\epsilon\right)\right\} I\left(x_{(n)} \leq \epsilon+1\right) I\left(x_{(1)} \geq \epsilon\right)
\end{aligned}$$

em que $b > 0$ conhecido.

Note que a última igualdade decorre do fato que,

$$\begin{aligned}
I_{[\epsilon,\epsilon+1]}(x_i) = 1 \Longleftrightarrow & \epsilon \leq x_i \leq \epsilon+1, \quad i = 1, \ldots, n \\
& \epsilon \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq \epsilon+1 \\
& \epsilon \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)} \leq \epsilon+1 \\
& \text{ é suficiente que} \\
& x_{(1)} \geq \epsilon \text{ e } x_{(n)} \leq \epsilon+1, \text{ onde } x_{(1)} = \min(x_1, \ldots, x_n) \text{ e } x_{(n)} = \max(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Logo

$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\epsilon,\epsilon+1]}(x_i) = I(x_n \leq \epsilon+1) I\left(x_{(1)} \geq \epsilon\right) = \begin{cases} 1, & x_{(1)} \geq \epsilon \text{ e } x_{(n)} \leq \epsilon+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a)Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\delta(X)$ de ξ e verifique que é equivariante por localização.

A densidade conjunta $p_\epsilon(\boldsymbol{x})$, quando vista como uma função de ϵ, é denominada função de verossimilhança de $\boldsymbol{x}$ e representada por $\mathcal{L}(\epsilon; \boldsymbol{x})$, sendo expressa da seguinte maneira.

$$\mathcal{L}(\epsilon; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{b^n\left(1-e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\epsilon\right)\right\} I(x_n \leq \epsilon+1) I\left(x_{(1)} \geq \epsilon\right)$$

Então,

$$I\left(x_{(n)} \leq \epsilon+1\right) I\left(x_{(1)} \geq \epsilon\right) = I_{\left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]}(\epsilon) = \begin{cases} 1, \text{ se } x_{(1)} \geq \epsilon \text{ e } x_{(n)} \leq \epsilon+1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

O estimador $\hat{\epsilon} \in \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\mathcal{L}(\hat{\epsilon};\boldsymbol{x}) = \sup_{\epsilon \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(\epsilon;\boldsymbol{x})$$

Este é o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de ϵ. Primeiramente, observe que, para todo $b > 0$, temos que $b^n \left(1 - e^{-1/b}\right)^n > 0$, uma vez que

$$b > 0 \Longrightarrow -\frac{1}{b} < 0 \Longleftrightarrow e^{-1/b} < e^0 \Longleftrightarrow 1 - e^{-1/b} > 0 \Rightarrow b^n \left(1 - e^{-1/b}\right)^n > 0$$

Assim sendo,

$$\mathcal{L}(\hat{\epsilon};\boldsymbol{x}) = \sup_{\epsilon \in \mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\epsilon\right)\right\} I_{\left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]}(\epsilon)$$

Assim, podemos notar que, para $\epsilon \in \left[x_{(n)} - 1, x_{(1)}\right]$, verifica-se que

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[\exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\epsilon\right)\right\}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\epsilon\right)\right\}\frac{n}{b} > 0$$

Consequentemente, $\mathcal{L}(\epsilon;\boldsymbol{x})$ é uma função estritamente crescente em relação a ϵ no intervalo $\left[x_{(n)} - 1, x_{(1)}\right]$. Assim, o EMV de ϵ satisfaz que

$$\delta(\boldsymbol{X}) = \hat{\epsilon} = X_{(1)}$$

pois

$$\sup_{\epsilon \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(\epsilon;\boldsymbol{x}) = \sup_{\epsilon \in \left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]} \mathcal{L}(\epsilon;\boldsymbol{x}) = \mathcal{L}\left(x_{(1)};\boldsymbol{x}\right)$$

A seguir, demonstraremos que este estimador é equivariante por localização. Para isso, considere $a \in \mathbb{R}$, e observe que

$$\begin{aligned}
\delta(\boldsymbol{X} + a) &= \min\left(X_1 + a, X_2 + a, \ldots, X_n + a\right) \\
&= X_{(1)} + a \\
&= \delta(\boldsymbol{X}) + a
\end{aligned}$$

(b)Obtenha o estimador de Pitman de ξ (estimador equivariante por localização de risco mınimo sob perda quadrática). Verifique que, de fato, o estimador que encontrou é equivariante por localização.

Observe que $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ é um vetor de variáveis aleatórias que pertence a uma família de distribuições de localização com densidade conjunta

$$p_\epsilon(\boldsymbol{x}) = f\left(x_1 - \epsilon, \ldots, x_n - \epsilon\right), \text{ com } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [\epsilon, \epsilon + 1]^n, \epsilon \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$f\left(x_1 - \epsilon, \ldots, x_n - \epsilon\right) = \frac{1}{b^n\left(1 - e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\epsilon\right)\right\}$$

Considere a função de perda quadrática $L(\epsilon, \delta(\boldsymbol{X})) = (\delta(\boldsymbol{X}) - \epsilon)^2$. Assim, o estimador equivariante por localização que minimiza o risco é o estimador de Pitman $\delta^*(\boldsymbol{X})$, tal que

$$\delta^*(\boldsymbol{x}) = \frac{\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} u f\left(x_1 - u, \ldots, x_n - u\right) du}{\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} f\left(x_1 - u, \ldots, x_n - u\right) du} \tag{1}$$

e $f\left(x_1 - u, \ldots, x_n - u\right)$ assume a forma a seguir

$$\begin{aligned}
f\left(x_1 - u, \ldots, x_n - u\right) &= \frac{1}{b^n \left(1 - e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - nu\right)\right\} I_{\left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]}(u) \\
&= \frac{1}{b^n \left(1 - e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{b}u\right\} I_{\left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]}(u) \\
&= \frac{1}{b^n \left(1 - e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} I_{\left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]}(u) \\
&= \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} I_{\left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]}(u) \underbrace{\frac{1}{b^n \left(1 - e^{-1/b}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}}_{h(\boldsymbol{x}, b)}
\end{aligned}$$

Assim, a partir da equação 1, obtém-se o estimador de Pitman como;

$$\begin{aligned}
\delta^*(\boldsymbol{x}) &= \frac{\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} u \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} h(\boldsymbol{x}, b) du}{\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} h(\boldsymbol{x}, b) du} \\
&= \frac{\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} u \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} du}{\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} du}
\end{aligned}$$

A integral do numerador será resolvida utilizando o método de integração por partes.

$$\begin{aligned}
w = u \text{ e } dv &= \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} \Rightarrow dw = du \text{ e } v = \frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} \\
\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} u \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} du &= wv\Big|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} - \int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} v du \\
\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} u \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} du &= u\frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} - \frac{b}{n}\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} du \\
&= u\frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} - \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \\
&= u\frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} - \left(\frac{b}{n}\right)^2\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \\
&= \frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\left(u - \frac{b}{n}\right)\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \\
&= \frac{b}{n}\left[\exp\left\{\frac{n}{b}x_{(1)}\right\}\left(x_{(1)} - \frac{b}{n}\right) - \exp\left\{\frac{n}{b}\left(x_{(n)} - 1\right)\right\}\left(x_{(n)} - 1 - \frac{b}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Por outro lado, a integral do denominador é calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\int_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \exp\left\{\frac{n}{b}u\right\} du &= \frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}u\right\}\Bigg|_{x_{(n)}-1}^{x_{(1)}} \\
&= \frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}x_{(1)}\right\} - \frac{b}{n}\exp\left\{\frac{n}{b}\left(x_{(n)} - 1\right)\right\} \\
&= \frac{b}{n}\left(\exp\left\{\frac{n}{b}x_{(1)}\right\} - \exp\left\{\frac{n}{b}\left(x_{(n)} - 1\right)\right\}\right)
\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \frac{\cancel{\frac{b}{n}}[\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}\left(X_{(1)}-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}\left(X_{(n)}-1-\frac{b}{n}\right)]}{\cancel{\frac{b}{n}}[\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}]}$$
$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \frac{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}\left(X_{(1)}-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}\left(X_{(n)}-1-\frac{b}{n}\right)}{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}}$$

Seja $a \in \mathbb{R}$ e note o seguinte

$$\begin{aligned}
\delta^*(\boldsymbol{X}+a) =& \frac{\exp\left\{\frac{n}{b}(X+a)_{(1)}\right\}\left((X+a)_{(1)}-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}\left((X+a)_{(n)}-1\right)\right\}\left((X+a)_{(n)}-1-\frac{b}{n}\right)}{\exp\left\{\frac{n}{b}(X+a)_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left((X+a)_{(n)}-1\right)\right\}}\\
=& \frac{\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(1)}+a\right)\right\}\left(X_{(1)}+a-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}+a-1\right)\right\}\left(X_{(n)}+a-1-\frac{b}{n}\right)}{\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(1)}+a\right)\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}+a-1\right)\right\}}\\
=& \frac{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}+a\frac{n}{b}\right\}\left(X_{(1)}+a-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(n)}+a\frac{n}{b}-\frac{n}{b}\right\}\left(X_{(n)}+a-1-\frac{n}{b}\right)}{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}+a\frac{n}{b}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(n)}+a\frac{n}{b}-\frac{n}{b}\right\}}\\
=& \frac{\exp\left\{\frac{n}{b}a\right\}\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}\left(X_{(1)}+a-\frac{b}{n}\right)-\left\{\exp\frac{n}{b}a\right\}\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}\left(X_{(n)}+a-1-\frac{b}{n}\right)}{\exp\left\{\frac{n}{b}a\right\}\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}a\right\}\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}}\\
=& \frac{\cancel{\exp\left\{\frac{n}{b}a\right\}}\left[\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}\left(X_{(1)}+a-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}\left(X_{(n)}+a-1-\frac{b}{n}\right)\right]}{\cancel{\exp\left\{\frac{n}{b}a\right\}}\left[\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}\right]}\\
=& \frac{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}\left(X_{(1)}-\frac{b}{n}\right)-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}\left(X_{(n)}-1-\frac{b}{n}\right)}{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}}+\\
&+\frac{a\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-a\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}}{\exp\left\{\frac{n}{b}X_{(1)}\right\}-\exp\left\{\frac{n}{b}\left(X_{(n)}-1\right)\right\}}\\
=&\delta^*(\boldsymbol{X})+a, \forall a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Onde $\min(X_1+a,\ldots,X_n+a) = (X+a)_{(1)} = X_{(1)}+a$. Assim, o estimador $\delta^*(\boldsymbol{X})$ é equivariante por localização.

Questão 26 Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ com função densidade de probabilidade

$$f_X(x;\tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \dots, \frac{x_n}{\tau}\right), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n; \tau > 0$$

,em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r \geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(X)$, tal que $\delta(x) > 0$ para todo $x \in R^n$, é equivariante por escala se $\delta(bx) = b^r\delta(x)$, para todo $b > 0$ e todo $x \in R^n$. Considere a função de perda $L(\tau, d) = [(d-\tau^r)/\tau^r]^2$.

(a) Mostre que o risco $R(\tau, \delta(X))$ de qualquer estimador equivariante por escala $\delta(X)$ é constante.
Seja $U = (U_1, \dots, U_n)$ v.a. independentes, tal que $X \stackrel{d}{=} \tau U$, $\tau > 0$. Então o risco $R(\tau, \delta(X))$ é dado por,

$$\begin{aligned}
R(\tau, \delta(X)) &= E_\tau[L(\tau, \delta(X)] \\
&= E_\tau\left[\left(\frac{\delta(X) - \tau^r}{\tau^r}\right)^2\right] \\
&= E_\tau\left[\left(\frac{\delta(\tau U) - \tau^r}{\tau^r}\right)^2\right] \\
&= E_\tau\left[\left(\frac{\tau^r\delta(U) - \tau^r}{\tau^r}\right)^2\right], \text{usando o fato que } \delta(\cdot) \text{ é equivariante por escala} \\
&= E_1\left[(\delta(U) - 1)^2\right]
\end{aligned}$$

Como podemos observar, o risco $R(\tau, \delta(X))$ é constante.

(b) Seja $\delta_0(X)$ um estimador equivariante por escala. Mostre que um estimador $\delta(X)$ é equivariante por escala se e somente se $\delta(x) = \delta_0(x)/v(x)$, em que $v(x)$ é tal que

$$v(cx) = v(x) > 0, \text{ para todo } c > 0 \text{ e todo } x \in R^n. \tag{2}$$

Mostre ainda que, se $x_n \neq 0$ e $n > 1$, uma condição necessária e suficiente para que $v(x)$ satisfaça (1) é que exista uma função $w(y)$ tal que $v(x) = w(y)$ em que $y = (x_1/|x_n|, ..., x_n/|x_n|)$.
Para a primeira parte da questão temos:
Provando ($\Rightarrow$): Supondo que $\delta(X)$ é equivariante por escala, então

$$\delta(cx) = c^r\delta(x), \forall c > 0, \forall x \in R \text{ e } r \geq 1$$

Pelo que foi definido no enunciado, seja $\delta_0(X)$ um estimador equivariante por escala, $v(cx) = \delta_0(x)/\delta(x)$ e $v(cx) = v(x) > 0$, para todo $c > 0$ e todo $x \in R^n$, então

$$v(cx) = \frac{\delta_0(cx)}{\delta(cx)} = \frac{c^r\delta_0(x)}{c^r\delta(x)} = \frac{\delta_0(x)}{\delta(x)} = v(x), \text{ para todo } c > 0 \text{ e todo } x \in R^n$$

Assim, $\delta(X) = \delta_0(X)/v(x)$.
Provando ($\Leftarrow$): Se o estimador $\delta(X)$ pode ser escrito como $\delta(X) = \delta_0(X)/v(x)$, sendo $\delta_0(x)$ equivariante por escala e $v(cx) = v(x) > 0$, para todo $c > 0$ e todo $x \in R^n$, então,

$$\delta(cx) = \frac{\delta_0(cx)}{v(cx)} = \frac{c^r\delta_0(x)}{v(x)} = c^r\delta(x), \text{ para todo } c > 0 \text{ e todo } x \in R^n$$

Logo, $\delta(X)$ é equivariante por escala.
Para a segunda parte do item, temos:
Provando ($\Rightarrow$): Se $v(cx) = v(x) > 0$, para todo $c > 0$ e todo $x \in R^n$, então se utilizarmos c tal que $c = 1/|x_n|, n > 1$ e $x_n \neq 0$, então

$$v(x) = v(cx) = v\left(\frac{1}{|x_n|}x\right) = v\left(\frac{x_1}{|x_n|}, \dots, \frac{x_n}{|x_n|}\right) = v\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) = w(y)$$

em que $y = (x_1/|x_n|, ..., x_n/|x_n|)$.
Provando ($\Leftarrow$): Se existe uma função $w(y)$ tal que $v(x) = w(y)$ em que $y = (x_1/|x_n|, ..., x_n/|x_n|)$, então, para $\forall c > 0$ e $x \in R$

$$v(cx) = w(cy) = w\left(\frac{cx_1}{|cx_n|}, \dots, \frac{cx_n}{|cx_n|}\right) = w\left(\frac{x_1}{|x_n|}, \dots, \frac{x_n}{|x_n|}\right) = w(y) = v(y)$$

(c) Seja $\delta_0(X)$ um estimador equivariante de risco finito. Mostre que o estimador equivariante de risco mínimo de τ^r é dado por

$$\delta^* = \delta_0 \frac{E_1[\delta_0(X)|Y]}{E_1[\delta_0^2(X)|Y]},$$

em que $Y = (X_1/|X_n|, ..., X_n/|X_n|)$.
Como visto anteriormente, $R(1, \delta(X)) = E_1[(\delta(X) - 1)^2]$, $\tau > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
R(1, \delta(X)) &= E_1[E_1[(\delta(X) - 1)^2|Y = y]] \\
&= E_1\left[E_1\left[\left(\frac{\delta_0(X)}{w(Y)} - 1\right)^2 |Y = y\right]\right] \\
&= E_1\left[E_1\left[\left(\frac{\delta_0(X) - w(Y)}{w(Y)}\right)^2 |Y = y\right]\right] \\
&= \int E_1\left[\left(\frac{\delta_0(X) - w(Y)}{w(Y)}\right)^2 |Y = y\right] dP_1(y) \\
&= \int \rho(\delta_0(X), w(Y)) dP_1(y)
\end{aligned}$$

Assim, encontrar $w^*(y)$ que minimize a função de risco $R(1, \delta(X))$ é equivalente a minimizar o integrando para cada y. Dado que, como enunciado, $\delta_0(X)$ tem risco finito,

$$\begin{aligned}
\rho(\delta_0(X), w(Y)) &= E_1\left[\left(\frac{\delta_0(X) - w(Y)}{w(Y)}\right)^2 |Y = y\right] \\
&= \frac{1}{w(Y)^2} E_1\left[(\delta_0(X) - w(Y))^2 |Y = y\right] \\
&= \frac{1}{w(Y)^2}\left(E_1\left[(\delta_0(X))^2 |Y = y\right] - 2E_1\left[(\delta_0(X)w(Y)) |Y = y\right] + E_1\left[(w(Y))^2 |Y = y\right]\right) \\
&= \frac{1}{w(Y)^2} E_1\left[(\delta_0(X))^2 |Y = y\right] - \frac{2}{w(Y)} E_1\left[\delta_0(X) |Y = y\right] + 1
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho(\delta_0(X), w(y))}{\partial w(y)} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{(w^*(y))^3} E_1\left[(\delta_0(X))^2 |Y = y\right] + \frac{2}{(w^*(y))^2} E_1\left[\delta_0(X) |Y = y\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{(w^*(y))^3} E_1\left[(\delta_0(X))^2 |Y = y\right] = \frac{2}{(w^*(y))^2} E_1\left[\delta_0(X) |Y = y\right] \\
&\Leftrightarrow w^*(y) = \frac{E_1\left[(\delta_0(X))^2 |Y = y\right]}{E_1\left[\delta_0(X) |Y = y\right]}
\end{aligned}$$

Logo, $w^*(Y) = \frac{E_1\left[(\delta_0(X))^2|Y\right]}{E_1[\delta_0(X)|Y]}$. Desse modo, o estimador equivariante de risco mínimo de τ^r é dado por

$$\delta^*(X) = \frac{\delta_0(X)}{w^*(Y)} = \delta_0(X)\frac{E_1[\delta_0(X)|Y]}{E_1[\delta_0^2(X)|Y]},$$

em que $Y = (X_1/|X_n|, ..., X_n/|X_n|)$.

(d) Considere a situação em que $(X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(0, \tau^2)$, $\tau > 0$. Encontre o estimador equivariante de risco mínimo de τ^2. Sugestão: usar o Teorema de Basu.
Seja a distribuição conjunta de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ dada por

$$\begin{aligned}
p_\tau(x) &\overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} p_\tau(x_i) I_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\tau^2}\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\tau}\right)^2\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), x \in R^n, \tau > 0
\end{aligned}$$

com $f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\tau}\right)^2\right\}$. Assim, como podemos observar, a distribuição $p_\tau(x)$ pertence a família de escala. Além disso, a distribuição $p_\tau(x)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
p_\tau(x) &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\tau}\right)^2 - \frac{n}{2}\log(\tau^2)\right\} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \exp\{\eta T(x) - A(\eta)\} h(x)
\end{aligned}$$

em que $\eta = -\frac{1}{2\tau^2}$, $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$, $A(\eta) = \frac{n}{2}\log(\tau^2) = \frac{n}{2}\log\left(-\frac{1}{2\eta}\right)$ e $h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^n I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$.
Como o espaço paramétrico de $\eta \in (-\infty, 0)$ contém retângulos unidimensionais abertos, a família é de posto completo, logo, a estatística $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ é suficiente e completa.
Considerando o estimado $\delta_0(X) = T(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$, temos

$$\delta_0(bx) = \sum_{i=1}^{n} (bx_i)^2 = b^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = b^2 \delta_0(x), \quad b > 0$$

Como $\delta_0(x) > 0, \forall x \in R^n$, por definição o estimador $\delta_0(x)$ é equivariante por escala.
Com base no item anterior, podemos obter o estimador equivariante de risco mínimo de τ^2 com

$$\delta^*(X) = \delta_0(X) \frac{E_1[\delta_0(X)|Y]}{E_1[\delta_0^2(X)|Y]},$$

em que $Y = \psi(X) = \left(\frac{X_1}{|X_n|}, \ldots, \frac{X_n}{|X_n|}\right)$ tal que $x \neq 0$ e $n > 1$. Observe que, sendo $b > 0$,

$$\begin{aligned}
Y &= \psi(bX) \\
&= \left(\frac{bX_1}{|bX_n|}, \ldots, \frac{bX_n}{|bX_n|}\right) \\
&= \left(\frac{X_1}{|X_n|}, \ldots, \frac{X_n}{|X_n|}\right) \\
&= \psi(X)
\end{aligned}$$

logo, $Y = \psi(X)$ é invariante por escala, sendo função do vetor aleatório X que tem distribuição em uma família de escala, portanto, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ é uma estatística ancilar. Como $\delta_0(X)$ é uma estatística suficiente e completa e Y é ancilar, pelo Teorema de Basu, $\delta_0(X)$ é independente de Y.
Para $r = 1$, as v.a. X_i são independentes e distribuidas segundo $N(0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, então $Z =$

$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$. Assim, o estimador equivariante de risco mínimo de τ^2 é dado por

$$
\begin{aligned}
\delta^*(X) &= \delta_0(X)\frac{E_1[\delta_0(X)]}{E_1[\delta_0^2(X)]} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 \frac{E_1[\sum_{i=1}^n X_i^2]}{E_1[Z^2]} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 \frac{\sum_{i=1}^n E_1[X_i^2]}{E_1[Z^2]} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 \frac{\sum_{i=1}^n (Var_1(X_i) + E_1^2[X_i])}{(Var_1(Z) + E_1^2[Z])} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 \frac{\sum_{i=1}^n (1+0)}{(2n+n^2)} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 \frac{n}{2n+n^2} \\
&= \frac{1}{2+n}\sum_{i=1}^n X_i^2
\end{aligned}
$$

27. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_\tau(\boldsymbol{X};\tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), \; \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tau > 0$$

em que f é conhecida e τ é parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ, $r \geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(\boldsymbol{X})$ é equivariante por escala se $\delta(b\boldsymbol{X}) = b^r \delta(\boldsymbol{X})$, para todo $b > 0$. Pode-se mostrar que o estimador de Pitman de τ^r, dado por $\delta^*(\boldsymbol{X})$ sendo

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1} f\left(vx_1, \ldots, vx_n\right) dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1} f\left(vx_1, \ldots, vx_n\right) dv}$$

é um estimador equivariante por escala de risco mínimo sob perda $[(d - \tau^r)/\tau^r]^2$.

(a) Mostre que, de fato, o estimador $\delta^*(\boldsymbol{X})$ é equivariante por escala.

Resolução

$$\begin{aligned}
\delta^*(b\boldsymbol{X}) &= \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1} f\left(bvx_1, \ldots, bvx_n\right) dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1} f\left(bvx_1, \ldots, bvx_n\right) dv} \\
&\text{Seja } bv = k \Longleftrightarrow v = \frac{k}{b}, bdv = dk \Longrightarrow v = \frac{dk}{b}, \; b > 0 \\
&= \frac{\int_0^\infty \left(\frac{k}{b}\right)^{n+r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) \frac{dk}{b}}{\int_0^\infty \left(\frac{k}{b}\right)^{n+2r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) \frac{dk}{b}} \\
&= \frac{\frac{1}{b^{n+r-1} \cdot b}}{\frac{1}{b^{n+2r-1} \cdot b}} \frac{\int_0^\infty k^{n+r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk}{\int_0^\infty k^{n+2r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk} \\
&= \frac{\frac{1}{b^{n+r}}}{\frac{1}{b^{n+2r}}} \frac{\int_0^\infty k^{n+r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk}{\int_0^\infty k^{n+2r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk} \\
&= \frac{b^{n+2r}}{b^{n+r}} \frac{\int_0^\infty k^{n+r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk}{\int_0^\infty k^{n+2r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk} \\
&= \left(b^{n+2r-n-r}\right) \frac{\int_0^\infty k^{n+r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk}{\int_0^\infty k^{n+2r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk} \\
&= b^r \frac{\int_0^\infty k^{n+r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk}{\int_0^\infty k^{n+2r-1} f\left(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\right) dk} \\
&= b^r \delta^*(\boldsymbol{X}), b > 0, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Logo, o estimador $\delta^*(\boldsymbol{X})$ é equivariante por escala.

(b) Obtenha o estimador $\delta^*(\boldsymbol{X})$ de τ^r para a situação em que $\boldsymbol{X}$ é uma amostra aleatória da distribuição exponencial de média $\tau > 0$.

Resolução

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_\tau(\boldsymbol{X};\tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), \; \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tau > 0$$

em que f é conhecida e τ é parâmetro de escala desconhecido.

Considerando $f_\tau(x;\tau)$ uma distribuição exponencial de média $\tau > 0$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
f_\tau(x;\tau) &= \frac{1}{\tau}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}\right\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)\,,\ \tau>0\\
f(\boldsymbol{X};\tau) &\overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} f_\tau(\boldsymbol{x};\tau)(x_i)\,\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}x_i\right\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)\\
&= \frac{1}{\tau^n}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}\mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}}\mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\infty\}}\\
&= \frac{1}{\tau^n}f\left(\frac{x_1}{\tau},\ldots,\frac{x_n}{\tau}\right),\tau>0\\
\text{Se } f_\tau(\boldsymbol{X};\tau) &= \frac{1}{\tau^n}f\left(\frac{x_1}{\tau},\ldots,\frac{x_n}{\tau}\right),\ \boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\tau>0,\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1}f(vx_1,\ldots,vx_n)\,dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1}f(vx_1,\ldots,vx_n)\,dv}
\end{aligned}
$$

Então, para a nossa fistribuição tem-se:

$$
\begin{aligned}
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,dv}\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \frac{\int_0^\infty\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i v}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{n+r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,dv}{\int_0^\infty\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i v}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{n+2r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,dv}\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \frac{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{n+r-1}\int_0^\infty(\sum_{i=1}^n x_i v)^{n+r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{n+2r-1}\int_0^\infty(\sum_{i=1}^n x_i v)^{n+2r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{n+r-1-n-2r+1}\times\frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}}\times\frac{\int_0^\infty(\sum_{i=1}^n x_i v)^{n+r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\int_0^\infty(\sum_{i=1}^n x_i v)^{n+2r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{-r}\frac{\int_0^\infty(v\sum_{i=1}^n x_i)^{n+r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\int_0^\infty(v\sum_{i=1}^n x_i)^{n+2r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{r}\frac{\int_0^\infty(v\sum_{i=1}^n x_i)^{n+r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\int_0^\infty(v\sum_{i=1}^n x_i)^{n+2r-1}\exp\{-v\sum_{i=1}^n x_i\}\,d\left(v\sum_{i=1}^n x_i\right)}\\
\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{r}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+2r)},\quad \Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt,\ \text{aqui},\ t=v\sum_{i=1}^n x_i
\end{aligned}
$$

Assim, o estimador $\delta^*(\boldsymbol{X})$ de τ^r para a distribuição exponencial é:

$$
\delta^*(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{r}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+2r)},r\geq 1
$$

(c) No contexto do item (b), encontre o estimador não viesado de risco mínimo de τ^r considerando a perda dada acima.

$$
\begin{aligned}
f_\tau(\boldsymbol{X};\tau) &= \frac{1}{\tau^n}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n x_i\right\}\mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}}\mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\infty\}} \\
f_\tau(\boldsymbol{X};\tau) &= \exp\left\{\log\left(\frac{1}{\tau^n}\right)\right\}\ \exp\left\{-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n x_i\right\}\mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}}\mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\infty\}} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n x_i - n\log(\tau)\right\}\mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}}\mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\infty\}} \\
&= \exp\{\eta T(\boldsymbol{x}) - A(\eta)\}h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

onde,

$$
\begin{cases}
T(\boldsymbol{X}) & = \sum_{i=1}^n X_i, \eta = -\frac{1}{\tau} \\
A(\eta) & = n\log(\tau) = n\left(-\frac{1}{\eta}\right) \\
h(\boldsymbol{x}) & = \mathbb{I}_{\{X_{(1)}>0\}}\mathbb{I}_{\{X_{(n)}<\infty\}}
\end{cases}
$$

$\eta \in \mathbb{R}^-$. Este espaço paramétrico contém retângulos unidimensionais abertos e tanto o parâmetro canônico η e a estatística suficiente $T(\boldsymbol{X})$, não satisfazem as restrições lineares. Como consequência, $f(\cdot)$ pertence à família exponencial de posto completo.

Pela justificativa acima, $T(\boldsymbol{X})$ é estatística suficiente completa para τ.

$\Longrightarrow$ Função de perda

Seja $L(\tau,d) = \left(\frac{d-\tau^r}{\tau^r}\right)^2, r \geq 1$ e $d = \delta(\boldsymbol{X})$, a função de perda quadrática e estimador de τ respectivamente. Esta função é quadrática e tomando d como o estimador de τ que minimiza a função de perda, como seu coeficiente é positivo, quando representanda graficamente a $L(\tau,d)$, será uma parábola voltada para cima, em que d vertice representará o valor do estimador de τ que minimiza a função de perda, ou seja, esta função será estritamente convexa.

$$
\frac{dL(\tau,d)}{d(d)} = \frac{2}{\tau^r}\left(\frac{d-\tau^r}{\tau^r}\right), \quad \frac{d^2L(\tau,d)}{dd^2} = \frac{2}{\tau^{2r}} > 0
$$

, esta função tem um estimador d que a minimiza.

$\Longrightarrow$ Estimador não viesado de risco mínimo sob perda quadrática

Como $X_i \sim e^{\frac{1}{\tau}}, \tau > 0, i = 1,\ldots,n \iff X_i \sim \text{Gama}(1, 1/\tau), \tau > 0, i = 1,\ldots,n$.

$$
T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gama}(n, 1/\tau), \quad X_i \text{ são iid}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] &= \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+2r)}\mathbb{E}\left[T^r\right] \\
\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] &= \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+2r)}\int_0^\infty t^r\frac{1}{\tau^n\Gamma(n)}t^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}t\right\}dt \\
\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] &= \frac{\Gamma(n+r)}{\tau^n\Gamma(n)\Gamma(n+2r)}\int_0^\infty t^{r+n-1}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}t\right\}dt \\
\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] &= \frac{\Gamma(n+r)}{\tau^n\Gamma(n)\Gamma(n+2r)}\int_0^\infty \left(\frac{\tau t}{\tau}\right)^{r+n-1}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}t\right\}\tau d\left(\frac{t}{\tau}\right) \\
\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] &= \frac{\Gamma(n+r)\tau^{r+n-1}}{\tau^n\Gamma(n)\Gamma(n+2r)}\int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{r+n-1}\exp\left\{-\frac{1}{\tau}t\right\}\tau d\left(\frac{t}{\tau}\right)
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] = \frac{\Gamma(n+r)\tau^{r+n-1}}{\tau^{n}\Gamma(n)\Gamma(n+2r)} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{r+n-1} \exp\left\{-\frac{1}{\tau}t\right\} \tau d\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] = \frac{\Gamma(n+r)\tau^{r-1}\tau}{\Gamma(n)\Gamma(n+2r)} \underbrace{\int_{0}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{r+n-1} \exp\left\{-\frac{1}{\tau}t\right\} d\left(\frac{t}{\tau}\right)}_{\text{função gama}}$$

$$\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] = \frac{\Gamma(n+r)\tau^{r}}{\Gamma(n)\Gamma(n+2r)}\Gamma(r+n)$$

$$\mathbb{E}\left[\delta(\boldsymbol{T})\right] = \frac{\Gamma^{2}(n+r)\tau^{r}}{\Gamma(n)\Gamma(n+2r)}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta(\boldsymbol{T}) &= \frac{\Gamma(n+2r)\Gamma(n)}{\Gamma^{2}(n+r)}\delta^{*}(\boldsymbol{T}) \\
&= \frac{\Gamma(n+2r)\Gamma(n)}{\Gamma^{2}(n+r)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{r} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+2r)}, r \geq 1 \\
&= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+r)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{r}, r \geq 1 \\
&= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+r)} T^{r}, r \geq 1
\end{aligned}$$

Observa-se que $\mathbb{E}[\delta(\boldsymbol{X})] = \tau^{r}, \forall \tau > 0$ e $r \geq 1$ e como descrito acima, a função de perda é estritamente convexa em relação a d. Assim, $\delta(\boldsymbol{T}) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+r)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{r}, r \geq 1$, é estimador não viesado de risco mínimo, pois, sob perda quadrática o estimador de Pitman é admissível.