UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Programa de Post-Graduação em Estatística

Katerine Zuniga Lastra, Marília de Melo Sombra, Alex Monito Nhancololo

Lista 04 – Semestre de 2024-II – Prof. Silvia Ferrari

Questão 2 Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X, que tem distribuição geométrica com função de probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta), \quad x = 0, 1, \ldots; \quad \theta \in [0, 1).$$

Considere o problema de estimar θ. Obtenha (i) o estimador de máxima verossimilhança; (ii) o estimador do método dos momentos e (iii) o estimador de Bayes com respeito à perda quadrática tomando uma distribuição a priori uniforme no intervalo unitário.

Para (i), a função de densidade conjunta é dada por

$$\begin{aligned}
L(\theta, x) &= \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta) I_{\{0,1,\ldots\}}(x_i) \\
&= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^n \prod_{i=1}^{n} I_{\{0,1,\ldots\}}(x_i) \\
&\propto \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^n
\end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é

$$l(\theta, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(\theta) + n \log(1-\theta)$$

Assim, obtemos o EMV de θ, fazendo

$$\begin{aligned}
& \frac{dl(\theta, x)}{d\theta} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\hat{\theta}} - n \frac{1}{1-\hat{\theta}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \overline{x} \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{1-\hat{\theta}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1-\hat{\theta}}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\overline{x}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\hat{\theta}} - 1 = \frac{1}{\overline{x}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\overline{x}} + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1+\overline{x}}{\overline{x}} \\
\Leftrightarrow \quad & \hat{\theta} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}
\end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\frac{d^2 l(\theta, x)}{d\theta^2} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\theta^2} - n \frac{1}{(1-\theta)^2} < 0$$

Para (ii), temos que $\mu = \frac{\theta}{1-\theta}$ e $m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, logo, obtemos o estimador pelo metodo dos momentos fazendo,

$$\begin{aligned}
&\frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} = \overline{x} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1-\hat{\theta}}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\overline{x}} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{\hat{\theta}} - 1 = \frac{1}{\overline{x}} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\overline{x}} + 1 \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1+\overline{x}}{\overline{x}} \\
\Leftrightarrow\quad &\hat{\theta} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}
\end{aligned}$$

Para (iii), temos a distribuição a priori é dado por $\Theta \sim U(0,1)$

$$\pi(\theta) = 1 I_{(0,1)}(\theta)$$

a função de perda é $L_R(\theta, d) = (\theta - d)^2$, e

$$f(x|\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^n \prod_{i=1}^n I_{\{0,1,\ldots\}}(x_i)$$

Assim, a distribuição a posteriori de θ é

$$\pi(\theta|x) = \pi(\theta) \times f(x|\theta) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^n I_{(0,1)}(\theta)$$

Assim, $\Theta|X = x \sim \text{Beta}(\sum_{i=1}^n x_i + 1, n+1)$ Logo, obtemos o estimador de Bayes, fazendo

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + 1}{(\sum_{i=1}^n X_i + 1) + (n+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + 1}{\sum_{i=1}^n X_i + n + 2} \tag{1}$$

1) Suponha que, dado θ, $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_i|\theta \sim U(0,\theta)$. Considere a seguinte distribuição a priori para θ: $\frac{1}{\theta} \sim \text{Gama}(a,b)$, com $a, b > 0$ conhecidos.

(a) O estimador de Bayes de θ sob perda quadrática é dado por $\hat{\theta}(X_{(n)})$, onde $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$, e

$$\hat{\theta}(y) = \frac{\int_y^\infty \theta \cdot \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta b}\right) d\theta}{\int_y^\infty \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta b}\right) d\theta}.$$

Solução:

O estimador de bayes sob perda quadrática é dado por

$$\hat{\theta}(\hat{X}_{(n)}) = \mathbb{E}[\theta|X = x] = \int_{S(\theta)} \theta \lambda(\theta|\boldsymbol{x}) d\theta = \int_{S(\theta)} \theta \frac{p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)}{q(\boldsymbol{x})} d\theta$$

onde $\lambda(\theta|X)$ é distribuição posterior de θ.

$$\lambda(\theta) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} \theta^{-a-1} \exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right) \text{ e } \quad p(X = x|\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x), \quad \theta \in (0,\infty)$$

$$p(\boldsymbol{x}|\theta) \overset{iid}{=} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \theta\}}(x) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{I}_{\{\theta > x_{(n)}\}}(x)$$

$$
\begin{aligned}
p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta) = p(\boldsymbol{x}|\theta) \times \lambda(\theta) &= \frac{1}{\theta^n} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)\mathbb{I}_{\{\theta > x_{(n)}\}}(x), \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty) \\
&= \frac{1}{\theta^n} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)\mathbb{I}_{\{\theta > x_{(n)}\}}(x), \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty) \\
&= \frac{1}{\theta^n} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)\mathbb{I}_{\{\theta > x_{(n)}\}}(x), \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty) \\
&= \frac{1}{\theta^n} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)\mathbb{I}_{\{\theta > x_{(n)}\}}(x), \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{x}) &= \int_{s(\theta)} p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)d\theta = \int_{s(\theta)} \frac{1}{\theta^n} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)\mathbb{I}_{\{\theta > x_{(n)}\}}(x)d\theta, \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty) \\
&= \int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\theta^n} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta \\
&= \int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \times \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}(\hat{X}_{(n)}) = \mathbb{E}[\theta|X = x] &= \int_{S(\theta)} \theta\lambda(\theta|\boldsymbol{x})d\theta = \int_{S(\theta)} \theta\frac{p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)}{q(\boldsymbol{x})}d\theta, \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty) \\
&= \frac{\int_{S(\theta)} \theta p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)d\theta}{q(\boldsymbol{x})}, \quad \theta \in (x_{(n)}, \infty) \\
&= \frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)d\theta}{q(\boldsymbol{x})} \\
&= \frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta\frac{1}{\theta^n} \times \cancel{\frac{1}{\Gamma(a)b^a}}\theta^{-a-1}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \times \cancel{\frac{1}{\Gamma(a)b^a}}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta} \\
&= \frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta\frac{1}{\theta^{n+a+1}}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \times \exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta}
\end{aligned}
$$

Assim, considerando $\hat{X}_{(n)} = y$, tem-se:

$$
\hat{\theta}(y) = \frac{\int_y^{\infty} \theta\frac{1}{\theta^{n+a+1}}\exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta}{\int_y^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \times \exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right)d\theta}
$$

(b) Mostre que $\hat{\theta}(y)$ pode ser expresso como

$$
\hat{\theta}(y) = \frac{1}{b(n+a-1)} \cdot \frac{P\left[\chi^2_{2(n+a-1)} < \frac{2}{by}\right]}{P\left[\chi^2_{2(n+a)} < \frac{2}{by}\right]}.
$$

Solução: Seja,

$$
\theta = \frac{2}{bx}, \qquad d\theta = -\frac{2}{bx^2}dx
$$

Sabe-se que $\theta \in (y, \infty)$. Se $\theta = y$ se tem: $\theta = \frac{2}{bx} \Longrightarrow y = \frac{2}{bx} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{by} \Longleftrightarrow \theta \in (\frac{2}{by}, \infty)$.

Assim,

$$\hat{\theta}(y) = \frac{\int_y^\infty \theta \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right) d\theta}{\int_y^\infty \frac{1}{\theta^{n+a+1}} \times \exp\left(-\frac{1}{b\theta}\right) d\theta}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{2}{bx} \frac{1}{(\frac{2}{bx})^{n+a+1}} \left[\exp\left(-\frac{1}{b(\frac{2}{bx})}\right)\right] (-\frac{2}{bx^2}) dx}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{1}{(\frac{2}{bx})^{n+a+1}} \times \left[\exp\left(-\frac{1}{b(\frac{2}{bx})}\right)\right] (-\frac{2}{bx^2}) dx}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty (\frac{2}{bx})^{1-n-a-1} \left[\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\right] (\frac{1}{bx^2}) dx}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{1}{\frac{2^{n+a+1}}{b^{n+a+1}x^{n+a+1}}} \times \left[\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\right] (\frac{1}{bx^2}) dx}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{b^{n+a-1}x^{n+a-2}}{2^{n+a}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{b^{n+a+1-1}x^{n+a+1-2}}{2^{n+a}\times 2} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{b^{n+a}x^{n+a-2}}{b\times 2^{n+a}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{b^{n+a}x^{n+a-1}}{2^{n+a}\times 2} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{x^{n+a-2}}{b} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{x^{n+a-1}}{2} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{\left(\frac{2x}{2}\right)^{n+a-2}}{b} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) 2d\left(\frac{x}{2}\right)}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{\left(\frac{2x}{2}\right)^{n+a-1}}{2} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) 2d\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \frac{2^{n+a-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+a-2}}{b} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)}{\int_{\frac{2}{by}}^\infty 2^{n+a-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+a-1} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{by}}^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{n+a-2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)}{b\int_{\frac{2}{by}}^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{n+a-1} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\Gamma(n+a-1)\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \frac{1}{\Gamma(n+a-1)} \frac{x^{(n+a-1)-1}}{2^{(n+a-1)-1}} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}{-b\Gamma(n+a)\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \frac{1}{\Gamma(n+a)} \frac{x^{(n+a)-1}}{2^{(n+a)-1}} \times \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}$$

$$= \frac{-\Gamma(n+a-1)\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \frac{1}{\Gamma(n+a-1)} \frac{x^{(n+a-1)-1}}{2^{(n+a-1)}} \exp\left(-(2^{-1})x\right) dx}{-b\Gamma(n+a)\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \frac{1}{\Gamma(n+a)} \frac{x^{(n+a)-1}}{2^{(n+a)}} \times \exp\left(-(2^{-1})x\right) dx}$$

$$= \frac{\Gamma(n+a-1)\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n+a-1)}(2^{-1})^{(n+a-1)}x^{(n+a-1)-1}\exp\left(-(2^{-1})x\right)}_{Gama(n+a-1,2)} dx}{b\Gamma(n+a)\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n+a)}(2^{-1})^{n+a}x^{(n+a)-1} \times \exp\left(-(2^{-1})x\right)}_{Gama(n+a,2)} dx}$$

Sabe-se $Gama\left(\frac{x}{2},2\right) \overset{d}{=} \chi^2_{(x)}$, $Gama(a,r) = \frac{r^a x^{a-1} e^{-r\cdot x}}{\Gamma(a)}$ e $Gama(n) = (n-1)!$.

$$\hat{\theta}(y) = \frac{(n+a-2)!\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} Gama(\frac{2(n+a-1)}{2},2) dx}{b(n+a-1)!\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} Gama(\frac{2(n+a)}{2},2) dx} = \frac{(n+a-2)!\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \chi^2_{2(n+a-1)} dx}{b(n+a-1)\cdot(n+a-2)!\int_{-\infty}^{\frac{2}{by}} \chi^2_{2(n+a)} dx}$$

$$\hat{\theta}(y) = \frac{1}{b(n+a-1)} \cdot \frac{P\left[\chi^2_{2(n+a-1)} < \frac{2}{by}\right]}{P\left[\chi^2_{2(n+a)} < \frac{2}{by}\right]}$$

3. Prove ou dê contra-exemplo.

(a)Se um estimador minimax é único, então ele é admissível.

Resposta: Verdadeira.
Demonstração:

Considere $\delta^*(\boldsymbol{X})$ como um estimador minimax único. Vamos supor, por contradição, que δ^* não seja admissível. Dessa forma, deve existir um estimador alternativo δ' que domine δ^*, ou seja, $R(\theta, \delta') \leq R(\theta, \delta^*)$ para todo θ, com desigualdade estrita para pelo menos um valor de θ. Assim, podemos afirmar que:

$$\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta') \leq \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta^*).$$

Por outro lado, como $\delta^*(\boldsymbol{X})$ é minimax, ele atinge a menor cota superior para $\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta(\boldsymbol{X}))$, resultando em:

$$\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta'(\boldsymbol{X})) \leq \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})),$$
$$\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta'(\boldsymbol{X})) \geq \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})) = \inf_{\delta} \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta(\boldsymbol{X})).$$

Combinando as expressões anteriores, concluímos que:

$$\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta'(\boldsymbol{X})) = \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})).$$

Nesse caso, δ' também seria um estimador minimax, o que contradiz a hipótese de que δ^* é único. Portanto, se um estimador minimax δ^* é único, não pode haver outro estimador que o domine, o que implica que δ^* é admissível.

(b) Um estimador minimax não pode ser não viciado.

Resposta: Falsa.

Vamos apresentar um contra-exemplo, definindo um estimador δ que seja minimax e não viciado.

Considere $X_1, \ldots, X_n$ como uma amostra aleatória de uma distribuição de Poisson com média $\lambda > 0$. Se assumirmos uma função de perda da forma $\frac{1}{\lambda}(d-\lambda)^2$ e uma distribuição a priori Gama(a,b) para λ, com $a = 1$, o estimador $\bar{X}$ é minimax para λ (conforme demonstrado no exercício 10 da Lista 4). No entanto, este estimador é não viciado, pois

$$E_\lambda[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_\lambda\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda, \quad \forall \lambda > 0.$$

(c)Se um estimador tem risco constante e é admissível, ele é minimax.

Resposta: Verdadeira.
Demonstração:

Seja $\delta^*(\boldsymbol{X})$ um estimador com risco constante para θ, ou seja,

$$\sup_{\theta \in \Omega} R\left(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})\right) = R\left(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})\right) \tag{*}$$

Além disso, suponha que $\delta^*(\boldsymbol{X})$ seja admissível para θ. Assim, para qualquer outro estimador δ', temos:

$$R\left(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})\right) \leq R\left(\theta, \delta'(\boldsymbol{X})\right), \quad \forall \theta \in \Omega,$$

com desigualdade estrita para algum valor de θ. Com base na igualdade de acima (*), podemos reescrever isso da seguinte maneira:

$$\sup_{\theta \in \Omega} R\left(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})\right) \leq \sup_{\theta \in \Omega} R\left(\theta, \delta'(\boldsymbol{X})\right)$$

Portanto, temos que:

$$\sup_{\theta \in \Omega} R\left(\theta, \delta^*(\boldsymbol{X})\right) = \inf_{\delta} \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, \delta(\boldsymbol{X}))$$

ou seja, $\delta^*(\boldsymbol{X})$ é um estimador minimax.

(d)Se um estimador equivariante por localização de risco mínimo é admissível, ele é minimax.

Resposta: Verdadeira.

Demonstração:

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória cuja função de densidade é dada por:

$$f(\boldsymbol{x} - \theta) = f(x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

onde f é conhecida, θ é um parâmetro de localização não especificado, e $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Considere um estimador $\delta(\boldsymbol{X})$ que seja admissível e equivariante em relação ao parâmetro de localização θ. Em outras palavras, $\delta(\boldsymbol{x} + \theta) = \delta(\boldsymbol{x}) + \theta$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Além disso, assuma que a função de perda seja invariante sob translações: $L(\theta, \delta(\boldsymbol{X})) = L(\theta + a, \delta(\boldsymbol{X}) + a), \forall a \in \mathbb{R}$.

Definimos $\boldsymbol{U} = (U_1, \ldots, U_n)'$, onde U_i, $i = 1, \ldots, n$, são variáveis aleatórias independentes com distribuição fixa F. Podemos então expressar $\boldsymbol{X}$ como:

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{U} + \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Vamos denotar a função de risco associada ao estimador $\delta(\boldsymbol{X})$ como $R(\theta, \delta(\boldsymbol{X}))$, que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta(\boldsymbol{X})) &= E_\theta[L(\theta, \delta(\boldsymbol{X}))] \\ &= E_\theta[L(\theta, \delta(\boldsymbol{U} + \theta))] \\ &= E_\theta[L(\theta, \delta(\boldsymbol{U}) + \theta)] \\ &= E_0[L(0, \delta(\boldsymbol{U}))] \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, usamos a propriedade da família de distribuições invariante por localização; na terceira, usamos a definição de equivariância do estimador; e na quarta, usamos a invariância da função de perda. Assim, a função de risco não depende de θ, ou seja, o risco do estimador δ é constante em relação a θ. Portanto, pelo resultado do item (c), concluímos que δ é um estimador minimax, já que possui risco constante e é admissível (por hipótese).

5. Suponha que, dado θ, $X_1, \ldots, X_n$ (com $n \geq 1$) sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade

$$f(x|\theta) = \exp(\theta - x), \quad x > \theta.$$

Considere que a distribuição a priori para θ seja exponencial padrão, ou seja, $\pi(\theta) = \exp(-\theta)$.

Encontre a densidade a posteriori de θ e o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

Solução

$$\begin{aligned} f(x|\theta) &= \exp\{\theta - x\}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x) \\ f(\boldsymbol{x}|\theta) &\stackrel{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} \exp\{\theta - x_i\}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_i) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)\right\}\mathbb{I}_{\{x_{(1)}>\theta\}}\mathbb{I}_{\{x_{(n)}<\infty\}}(x) \\ \lambda(\theta) &= \exp\{-\theta\}, \quad \theta > 0 \\ p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta) &\stackrel{ind}{=} \lambda(\theta) \times f(\boldsymbol{x}|\theta) = \exp\{-\theta\} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)\right\}\mathbb{I}_{\{x_{(1)}>\theta\}}\mathbb{I}_{\{x_{(n)}<\infty\}}(x) \\ \lambda(\theta|\boldsymbol{x}) &= \frac{p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)}{q(x)} = \frac{f(\boldsymbol{x}|\theta) \times \lambda(\theta)}{q(x)} \\ q(x) &= \int_{s(\theta)} p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)d\theta \\ q(x) &= \int_{s(\theta)} \exp\{-\theta\} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)\right\}\mathbb{I}_{\{x_{(1)}>\theta\}}\mathbb{I}_{\{x_{(n)}<\infty\}}(x)d\theta, \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \int_{s(\theta)} \exp\{-\theta\} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)\right\} \mathbb{I}_{\{\theta < x_{(1)}\}} \mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x) d\theta, \quad \theta > 0 \\
&= \int_0^{x_{(1)}} \exp\{-\theta\} \times \exp\{n\theta - n\bar{x})\} d\theta \\
&= \int_0^{x_{(1)}} \exp\{-\theta\} \times \exp\{n\theta\} \frac{1}{e^{n\bar{x}}} d\theta \\
&= \frac{1}{e^{n\bar{x}}} \int_0^{x_{(1)}} exp\{-\theta + n\theta\} d\theta \\
&= \frac{1}{e^{n\bar{x}}} \int_0^{x_{(1)}} \exp\{(-1+n)\theta\} d\theta \\
&= \frac{1}{e^{n\bar{x}}} \int_0^{x_{(1)}} \frac{1}{(n-1)} \exp\{(-1+n)\theta\} d((-1+n)\theta) \\
&= \frac{1}{e^{n\bar{x}}(n-1)} \exp\{(-1+n)\theta\}\Big|_0^{x_{(1)}} \\
&= \frac{1}{e^{n\bar{x}}(n-1)} \exp\{(n-1)x_{(1)}\} - \frac{1}{e^{n\bar{x}}(n-1)} \\
&= \frac{1}{e^{n\bar{x}}(n-1)} \left[\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(\theta|\boldsymbol{x}) &= \frac{p(\theta, \boldsymbol{x}|\theta)}{q(x)} = \frac{f(\boldsymbol{x}|\theta) \times \lambda(\theta)}{q(x)} \\
\lambda(\theta|\boldsymbol{x}) &= \frac{\exp\{-\theta\} \times \exp\{\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)\} \mathbb{I}_{\{x_{(1)} > \theta\}} \mathbb{I}_{\{x_{(n)} < \infty\}}(x)}{\frac{1}{e^{n\bar{x}}(n-1)} \left[\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1\right]} \\
&= \frac{\exp\{-\theta\} \times \exp\{n\theta\} \frac{1}{e^{n\bar{x}}}}{\frac{1}{e^{n\bar{x}}(n-1)} \left[\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1\right]} \\
&= \frac{(n-1)\exp\{n\theta - \theta\}}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} \\
&= \frac{(n-1)\exp\{(n-1)\theta\}}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1}
\end{aligned}
$$

$\implies$ Estimador de bayes sob perda quadrática

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \mathbb{E}[\Theta|X] = \int_{s(\theta)} \theta \lambda(\theta|\boldsymbol{x}) d\theta \\
\delta(x) &= \int_0^{x_{(1)}} \theta \frac{(n-1)\exp\{(n-1)\theta\}}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} d\theta \\
\delta(x) &= \frac{1}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} \int_0^{x_{(1)}} \theta(n-1)\exp\{(n-1)\theta\} d\theta
\end{aligned}
$$

Seja $u = \theta$, $du = d\theta$ e $dv = (n-1)\exp\{(n-1)\theta\} d\theta$

$$
v = \int dv = \int (n-1)\exp\{(n-1)\theta\} d\theta = \frac{(n-1)}{(n-1)} \int \exp\{(n-1)\theta\} d((n-1)\theta) = \exp\{(n-1)\theta\}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{1}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} \left[\theta \exp\{(n-1)\theta\}\Big|_0^{x_{(1)}} - \int_0^{x_{(1)}} \exp\{(n-1)\theta\} d\theta\right] \\
&= \frac{1}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} \left[\theta \exp\{(n-1)\theta\}\Big|_0^{x_{(1)}} - \frac{1}{(n-1)} \exp\{(n-1)\theta\}\Big|_0^{x_{(1)}}\right] \\
&= \frac{1}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} \left[x_{(1)} \exp\{(n-1)x_{(1)}\} - \frac{1}{(n-1)} \exp\{(n-1)x_{(1)}\} - \left(-\frac{1}{(n-1)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} \left[x_{(1)} \exp\{(n-1)x_{(1)}\} - \frac{1}{(n-1)} \left(\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1\right)\right] \\
&= \frac{x_{(1)} \exp\{(n-1)x_{(1)}\}}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} - \frac{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1}{(n-1)(\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1)} \\
&= \frac{x_{(1)} \exp\{(n-1)x_{(1)}\}}{\exp\{(n-1)x_{(1)}\} - 1} - \frac{1}{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Assim, o estimador de Bayes fica:

$$\delta(X) = \frac{X_{(1)} \exp\{(n-1)X_{(1)}\}}{\exp\{(n-1)X_{(1)}\} - 1} - \frac{1}{(n-1)}$$

8. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma distribuição $N(0, \sigma^2)$. Considere o problema de estimar σ^2 com a função de perda $L(\sigma^2, d) = \left(\frac{d}{\sigma^2} - 1\right)^2 = \frac{(d-\sigma^2)^2}{\sigma^4}$. Considere uma distribuição a priori Gama(a, b) para $\theta = 1/(2\sigma^2)$ com densidade

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\theta^{a-1} \exp\left\{-\frac{\theta}{b}\right\}, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Considere $X|\theta \sim N(0, \sigma^2)$. A função de densidade condicional é dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x)^2\right) I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Assumindo $\theta = \frac{1}{2\sigma^2}$, a densidade conjunta da amostra $\boldsymbol{x}$, condicionada a θ, pode ser expressa por:

$$f(\boldsymbol{x} \mid \theta) = (\pi)^{-n/2}\theta^{n/2} \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

Considere uma distribuição a priori para θ pertencente à família Gama, Gama(a, b), onde $a > 0$ e $b > 0$, cuja densidade é dada por:

$$\pi(\theta) \propto \theta^{a-1} \exp\left(-\frac{\theta}{b}\right) I_{(0,\infty)}(\theta)$$

Assim, a distribuição a posteriori de θ, denotada por $\pi(\theta \mid \boldsymbol{x})$, é proporcional ao produto da verossimilhança pela priori:

$$\begin{aligned}
\pi(\theta \mid \boldsymbol{x}) \propto f(\boldsymbol{x} \mid \theta)\pi(\theta) &\propto \theta^{n/2} \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \theta^{a-1} \exp\left(-\frac{\theta}{b}\right) I_{(0,\infty)}(\theta) \\
&\propto \theta^{(n/2+a)-1} \exp\left(-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{b}\right)\right) I_{(0,\infty)}(\theta)
\end{aligned}$$

Portanto, θ condicionado a $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ segue uma distribuição Gama, ou seja:

$$\theta \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2} + a, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{b}\right)^{-1}\right).$$

(a) Encontre o estimador de Bayes de σ^2.

Considere a função de perda

$$L\left(\sigma^2, d\right) = \left(\frac{d - \sigma^2}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{(\sigma^2)^2}(d - \sigma^2)^2 = w(\sigma^2)\left(d - g(\sigma^2)\right)^2, \quad \forall\, \sigma^2 > 0$$

onde $g(\sigma^2) = \sigma^2$ e $w(\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^2$. Dessa forma, o estimador de Bayes $\delta_\Delta(\boldsymbol{X})$ é dado por:

$$
\begin{aligned}
\delta_\Delta(\boldsymbol{x}) &= \frac{E\left[w(\sigma^2)g(\sigma^2) \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right]}{E\left[w(\sigma^2) \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right]} \\
&= \frac{E\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^2 \sigma^2 \,\middle|\, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right]}{E\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^2 \,\middle|\, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right]} \\
&= \frac{E\left[\frac{1}{\sigma^2} \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right]}{\operatorname{Var}\left[\frac{1}{\sigma^2} \mid \boldsymbol{X}\right] + E^2\left[\frac{1}{\sigma^2} \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\right]}
\end{aligned}
$$

Como $\theta = \frac{1}{2\sigma^2}$, temos que $\frac{1}{\sigma^2} \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x} \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2}+a, 2\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{b}\right)^{-1}\right)$. Assim, segue que:

$$
\delta_\Delta(\boldsymbol{x}) = \frac{\frac{2\left(\frac{n}{2}+a\right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2+\frac{1}{b}}}{\frac{4\left(\frac{n}{2}+a\right)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\frac{1}{b}\right)^2} + \frac{4\left(\frac{n}{2}+a\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{2\left(\frac{n}{2}+a\right)}{\frac{4\left(\frac{n}{2}+a\right)\left(1+\frac{n}{2}+a\right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2+\frac{1}{b}}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{b}}{2\left(1+\frac{n}{2}+a\right)}
$$

(b) Mostre que o estimador minimax de σ^2 é $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n+2}$.

Considere uma sequência de distribuições a priori Gama(a_k, b) para θ, com $k \geq 1$ e $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Sendo que $a > 0$ e $b > 0$ são valores arbitrários, pelo resultado do item anterior, o estimador de Bayes utilizando essa sequência de estimadores é dado por:

$$
\delta_k(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{1}{b}}{2\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)}
$$

e o risco associado a esse estimador é:

$$
\begin{aligned}
R\left(\sigma^2, \delta_k(\boldsymbol{X})\right) &= E_{\sigma^2}\left[\frac{1}{(\sigma^2)^2}\left(\delta_k(\boldsymbol{X}) - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\operatorname{Var}\left(\delta_k(\boldsymbol{X})\right) + \left(E\left[\delta_k(\boldsymbol{X}) - \sigma^2\right]\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\operatorname{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{1}{b}}{2\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)}\right) + \left(E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{1}{b}}{2\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)}\right] - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\frac{n\left(E\left[X_1^4\right] - E^2\left[X_1^2\right]\right)}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2} + \left(\frac{nE\left[X_1^2\right] + \frac{1}{b}}{2\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)} - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\frac{2n\sigma^4}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2} + \left(\frac{n\sigma^2 + \frac{1}{b}}{2\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)} - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2} \cdot \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[2n\sigma^4 + \left(\frac{1}{b} - 2\sigma^2 - 2a_k\sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2} \cdot \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[2n\sigma^4 + \left(\frac{1}{b} - 2\sigma^2(1+a_k)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2} \cdot \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[2n\sigma^4 + \frac{1}{b^2} - \frac{4}{b}\sigma^2(1+a_k) + 4(\sigma^2)^2(1+a_k)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2} \cdot \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{4}{b}\sigma^2(1+a_k) + (\sigma^2)^2\left(2n + 4(1+a_k)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[\frac{1}{(b\sigma^2)^2} - \frac{4}{b}(1+a_k) \cdot \frac{1}{\sigma^2} + 2n + 4(1+a_k)^2\right]
\end{aligned}
$$

O risco de Bayes do estimador $\delta_k(\boldsymbol{X})$ é dado por:

$$
\begin{aligned}
r_k &= E\left[R\left(\sigma^2, \delta_k(\boldsymbol{X})\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[\frac{1}{b^2}E\left[\frac{1}{(\sigma^2)^2}\right] - E\left[\frac{1}{\sigma^2}\right]\cdot\frac{4}{b}(1+a_k) + \left(2n+4(1+a_k)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[\frac{1}{b^2}\left(4a_k b^2 + 4a_k^2 b^2\right) - 2a_k b\cdot\frac{4}{b}(1+a_k) + \left(2n+4(1+a_k)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{n}{2}+a_k\right)^2}\left[a_k(1+a_k) - 2a_k(1+a_k) + \frac{n}{2} + (1+a_k)^2\right]
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
r_k \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1+\frac{n}{2}}{(1+\frac{n}{2})^2} = \frac{1}{1+\frac{n}{2}} = \frac{2}{n+2} = r.
$$

Por outro lado, considere o estimador $\delta^M(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^n X_i^2$, cujo risco é:

$$
\begin{aligned}
R\left(\sigma^2, \delta^M(\boldsymbol{X})\right) &= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) + \left(E\left[\frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right] - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\frac{n\left(E\left[X_1^4\right] - E^2\left[X_1^2\right]\right)}{(n+2)^2} + \left(\frac{n}{n+2}E\left[X_1^2\right] - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left[\frac{2n\sigma^4}{(n+2)^2} + \left(\frac{n\sigma^2}{n+2} - \sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\cdot\frac{1}{(n+2)^2}\left[2n\sigma^4 + (-2\sigma^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\cdot\frac{1}{(n+2)^2}\cdot 2\sigma^4(n+2) = \frac{2}{n+2}
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
r = R\left(\sigma^2, \delta^M(\boldsymbol{X})\right) = \sup_{\sigma^2} R\left(\sigma^2, \delta^M(\boldsymbol{X})\right)
$$

Assim, $\delta^M(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^n X_i^2$ é um estimador minimax de σ^2.

22. Sejam $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ amostras aleatórias independentes das distribuições $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente; onde $\mu_x \in \mathbb{R}, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x^2 > 0$ e $\sigma_y^2 > 0$. Considere o problema de estimar $\Delta = \mu_y - \mu_x$ sob perda quadrática.

(a) Mostre que $\hat{\Delta} = \bar{Y} - \bar{X}$ é um estimador minimax de Δ quando σ_x e σ_y são conhecidos; com

$$
\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i.
$$

Solução

Seja, $\theta = (\mu_x, \mu_y.$ o risco do estimador de Bayes $\hat{\Delta}$, pode ser descrito por:

$$
\begin{aligned}
R(\Delta, \hat{\Delta}) &= \mathbb{E}\left[(\hat{\Delta} - \Delta)^2\right] \\
&= Var\left[(\hat{\Delta} - \Delta)\right] + \left(\mathbb{E}\left[(\hat{\Delta} - \Delta)^2\right]\right)^2 \\
&= Var\left[(\bar{Y} - \bar{X})\right] \\
&\overset{ind}{=} Var\left[\bar{Y}\right] + Var\left[\bar{X}\right] \\
&= \frac{\sigma_Y^2}{m} - \frac{\sigma_X^2}{n}, \quad m, n > 0 \\
\lambda(\mu_x, \mu_y) &\overset{ind}{=} \lambda(\mu_x)\lambda(\mu_y), \quad \text{em que } \lambda(\mu_y) \text{ e } \lambda(\mu_y) \text{ são priores (marginais) normais} \\
&\propto \exp\{-\frac{1}{2b_x}(\mu_x - a_x)^2\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2b_y}(\mu_y - a_y)^2\} \\
p(x, y\,|\mu_x, \mu_y) &\propto \exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x - \mu_x)^2\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}(y - \mu_y)^2\} \\
p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\,|\mu_x, \mu_y) &\propto \exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_x)^2\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\,|\mu_x, \mu_y) &\propto \exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_x)^2\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2\} \\
\lambda(\mu_x, \mu_y\,|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\propto p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\,|\mu_x, \mu_y) \times \lambda(\mu_x, \mu_y) \\
&\propto \exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_x)^2\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2\} \times \exp\{-\frac{1}{2b_x}(\mu_x - a_x)^2\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2b_y}(\mu_y - a_y)^2\} \\
&\propto exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i^2 - 2x_i\mu_x + \mu_x^2)\} \times \exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i\mu_y + \mu_y^2)\} \times \exp\{-\frac{1}{2b_x}(\mu_x^2 - 2\mu_x a_x + a_x^2)\} \times \\
&\times \exp\{-\frac{1}{2b_y}(\mu_y^2 - 2\mu_y a_y + a_x^2)\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_x^2}{b_x} - \frac{2\mu_x a_x}{b_x} + \frac{m\mu_x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2m\bar{x}\mu_x}{\sigma_x^2}\right)\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_y^2}{b_y} - \frac{2\mu_y a_y}{b_y} + \frac{n\mu_y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2n\bar{y}\mu_y}{\sigma_y^2}\right)\right\} \\
&\propto \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}\right)\left(\mu_x^2 - \frac{2\mu_x\left(\frac{a_x}{b_x} + \frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2}\right)}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}}\right)\right]\right)}_{\sim N\left(\frac{\frac{a_x}{b_x} + \frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2}}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}}, \frac{1}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}}\right)} \times \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}\right)\left(\mu_y^2 - \frac{2\mu_y\left(\frac{a_y}{b_y} + \frac{n\bar{y}}{\sigma_y^2}\right)}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}}\right)\right]\right)}_{\sim N\left(\frac{\frac{a_y}{b_y} + \frac{n\bar{y}}{\sigma_y^2}}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}}, \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}}\right)}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \mathbb{E}\left[\Delta | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right] = \bar{Y} - \bar{X} \\
&= \frac{\frac{a_y}{b_y} + \frac{n\bar{y}}{\sigma_y^2}}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}} - \frac{\frac{a_x}{b_x} + \frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2}}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}} \\
R(\Delta, \hat{\Delta}) &= Var\left[\bar{Y}\right] + Var\left[\bar{X}\right] \\
&= \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}} + \frac{1}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}} \\
\lim_{\substack{b_y \to \infty \\ b_x \to \infty}} R(\Delta, \hat{\Delta}) &= \lim_{b_y \to \infty} \left[\lim_{b_x \to \infty} R(\Delta, \hat{\Delta})\right] \\
&= \lim_{b_y \to \infty} \left[\lim_{b_x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}} + \frac{1}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}}\right] \\
&= \lim_{b_y \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}} + \frac{1}{\frac{m}{\sigma_x^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{n}{\sigma_y^2}} + \frac{1}{\frac{m}{\sigma_x^2}} \\
&= \frac{{\sigma_y}^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m} = sup_\theta(\theta, \bar{Y} - \bar{X}), \qquad \text{Que é uma constante}
\end{aligned}
$$

Sabe-se que se $sup_\theta(\theta, \hat{\Delta})$ é uma constante, então $\hat{\Delta}$ é minimax. Logo,

$$\hat{\Delta} = \bar{Y} - \bar{X}$$

é minimax.

(b) Mostre que $\hat{\Delta} = Y - X$ é um estimador minimax de Δ quando $\sigma_x^2 \leq M_x$ e $\sigma_y^2 \leq M_y$, sendo $M_x > 0$ e $M_y > 0$ constantes conhecidas.

Sugestão: Use o seguinte resultado:

Se, dado ξ, $Z_1, \ldots, Z_n$ são independentes e têm distribuição $N(\xi, \sigma^2)$, e se a distribuição a priori para ξ é $N(\zeta, b^2)$, então a distribuição a posteriori de ξ, dado $Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n$, é normal com média

$$\frac{nz/\sigma^2 + \zeta/b^2}{n/\sigma^2 + 1/b^2}$$

e variância

$$\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1},$$

onde $z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$.

Solução

$$
\begin{aligned}
R(\Delta, \hat{\Delta}) &= \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{\sigma_y^2}} + \frac{1}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{\sigma_x^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{M_y}} + \frac{1}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{M_x}}, \qquad M_x > 0 \text{ e } M_y > 0 \\
\lim_{\substack{b_y \to \infty \\ b_x \to \infty}} R(\Delta, \hat{\Delta}) &= \lim_{b_y \to \infty} \left[\lim_{b_x \to \infty} R(\Delta, \hat{\Delta}) \right] \\
&= \lim_{b_y \to \infty} \left[\lim_{b_x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{M_y}} + \frac{1}{\frac{1}{b_x} + \frac{m}{M_x}} \right] \\
&= \lim_{b_y \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{b_y} + \frac{n}{M_y}} + \frac{1}{\frac{m}{M_x}} \\
&= \frac{1}{\frac{n}{M_x}} + \frac{1}{\frac{m}{M_x}} \\
&= \frac{M_y}{n} + \frac{M_x}{m} \\
&= sup_\theta^*(\theta, \bar{Y} - \bar{X}), \qquad \text{Que é uma constante}
\end{aligned}
$$

- Se $M_y > \sigma_y^2$ e $M_x \leq \sigma_x^2$ ou vice-versa, observa-se que:

  $$sup_\theta^*(\theta, \bar{Y} - \bar{X}) > sup_\theta(\theta, \bar{Y} - \bar{X})$$

  , tornando $\bar{Y} - \bar{X}$ não minimax de Δ, pois existe outro estimador com menor supremo (menor risco máximo).

- Se $M_y = \sigma_y^2$ e $M_x = \sigma_x^2$, observa-se que:

  $$sup_\theta^*(\theta, \bar{Y} - \bar{X}) = sup_\theta(\theta, \bar{Y} - \bar{X})$$

  , logo $\bar{Y} - \bar{X}$ é estimador minimax de Δ.

- Se $M_y < \sigma_y^2$ e $M_x \leq \sigma_x^2$, ou vice-versa, ou ambos (M_x, M_y) estritamente menores, observa-se que:

  $$sup_\theta^*(\theta, \bar{Y} - \bar{X}) < sup_\theta(\theta, \bar{Y} - \bar{X})$$

  , logo $\bar{Y} - \bar{X}$ é estimador minimax de Δ.

Logo, $\hat{\Delta} = Y - X$ é um estimador minimax de Δ quando $\sigma_x^2 \leq M_x$ e $\sigma_y^2 \leq M_y$, sendo $M_x > 0$ e $M_y > 0$ constantes conhecidas.

Questão 15 Seja $\hat{\theta}$ um estimador não viciado de um parâmetro $\theta \in R$. Seja $R(\theta, \tilde{\theta})$ o risco do estimador $\tilde{\theta}$ de θ.

(a) Sob perda quadrática, mostre que o estimador $\hat{\theta}+c$, em que $c \neq 0$ é uma constante conhecida, não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ.
Sob perda quadrática, o risco do estimador $\hat{\theta} + c$ é dado por

$$
\begin{aligned}
R(\theta, \hat{\theta} + c) &= E[(\hat{\theta} + c - \theta)^2] \\
&= E[(\hat{\theta} - \theta + c)^2] \\
&= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] + 2cE[\hat{\theta} - \theta] + c^2
\end{aligned}
$$

Como $\hat{\theta}$ é um estimador não viciado para θ, $E[\hat{\theta} - \theta] = 0$, logo

$$
\begin{aligned}
R(\theta, \hat{\theta} + c) &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] + c^2 \\
&= R(\theta, \hat{\theta}) + c^2
\end{aligned}
$$

Como $c \neq 0$, $c^2 > 0$, então, $R(\theta, \hat{\theta} + c) > R(\theta, \hat{\theta})$. Assim, o estimador $\hat{\theta} + c$, em que $c \neq 0$ é uma constante conhecida, não é estimador minimax de θ, pois, o risco do estimador $\hat{\theta} + c$ é sempre maior do que o risco de $\hat{\theta}$. Não obstante, se $\sup_\theta R(\theta, \tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ, a comparação séria irrelevante, tendo em vista que $\sup_\theta R(\theta, \hat{\theta}) = \infty = \sup_\theta R(\theta, \hat{\theta} + c)$.

(b) Sob perda quadrática, mostre que o estimador $c\hat{\theta}$, em que $c \in (0, 1)$ é uma constante conhecida, não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ.
Sob perda quadrática, o risco do estimador $c\hat{\theta}$ é dado por

$$\begin{aligned} R(\theta, c\hat{\theta}) &= E[(c\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= c^2 E[(\hat{\theta} - \theta)^2 + (1 - c)^2 \theta^2] \end{aligned}$$

Observe que como $c \in (0, 1)$, $c^2 R(\theta, \hat{\theta}) < R(\theta, \hat{\theta})$. Além disso, vale salientar que o termo dado por $(1 - c)^2\theta^2$ é um erro adicional que cresce quadraticamente em função de θ. Assim,

$$\sup_\theta R(\theta, c\hat{\theta}) = \sup_\theta (c^2 R(\theta, \hat{\theta}) + (1 - c)^2\theta^2)$$

Nesse caso o supremo do risco de $c\hat{\theta}$ pode ser grande devido a expressão $(1-c)^2\theta^2$, implicando que o estimador $c\hat{\theta}$ não minimiza o supremo do risco, ou seja, não pode ser minimax. A menos que todos os estimadores fossem infinitos, pois nesse caso o aumento indefinido no risco de $c\hat{\theta}$ não faria diferença.

(c) Considere a função de perda$L(\theta, d) = (d - \theta)^2/\theta^2$, assumindo que $\theta \neq 0$. Mostre que o estimador $\hat{\theta}$ não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ. Sugestão: Obtenha o risco de $c\hat{\theta}$ com $c = 1/(1 + \zeta)$, em que $\zeta = \sup_\theta R(\theta, \hat{\theta})$, e compare com o risco de $\hat{\theta}$.
Sob a função de perda $L(\theta, d) = (d - \theta)^2/\theta^2$, o risco do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$R(\theta, \hat{\theta}) = E\left[\frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{\theta^2}\right]$$

Como $\hat{\theta}$ é um estimador não viciado para θ, $E[\hat{\theta} - \theta] = 0$, logo

$$R(\theta, \hat{\theta}) = \frac{Var(\hat{\theta})}{\theta^2}$$

que decresce com aumento em θ. Já se considerarmos o estimador $c\hat{\theta}$ o seu risco é dado por

$$R(\theta, c\hat{\theta}) = E\left[\frac{(c\hat{\theta} - \theta)^2}{\theta^2}\right] = \frac{c^2 Var(\hat{\theta})}{\theta^2} + \frac{(1 - c)^2\theta^2}{\theta^2}$$

Seja $\zeta = \sup_\theta \frac{Var(\hat{\theta})}{\theta^2} = \sup_\theta R(\theta, \hat{\theta})$. Assim, se $\zeta = \infty$, então $\sup_\theta R(\theta, c\hat{\theta}) = \infty$ e não será minimax. Mas, ses $0 < \zeta < \infty$ então $\sup_\theta R(\theta, c\hat{\theta}) = c^2\zeta + (1 - c)^2 = (1 + \zeta)c^2 - 2c + 1$, que atinge o ponto de minimo global em $c^* = \frac{1}{1+\zeta}$, desde que $\zeta > 0$, $c^* < 1$ e, portanto, $\sup_\theta R(\theta, c^*\hat{\theta}) < \sup_\theta R(\theta, \hat{\theta})$.

Questão 23 Prove: Seja δ um estimador de Bayes (respectivamente NVVUM, minimax, admissível) de $g(\theta)$ sob perda quadrática. Então, $a\delta + b$ é um estimador de Bayes (respectivamente NVVUM, minimax, admissível) de $ag(\theta) + b$. Aqui, a e b são números reais.
Se δ é um estimador de Bayes de $g(\theta)$ sob perda quadrática, e $\delta' = a\delta + b$ é um estimador de $g'(\theta) = ag(\theta) + b$. O estimador de Bayes de $g'(\theta)$ é dado por

$$\delta' = E[ag(\theta) + b|X = x] = aE[g(\theta)|X = x] + b = a\delta + b$$

Sob perda quadrática, o risco de δ' é dado por

$$R(g'(\theta), \delta') = E_\theta[(a\delta + b - ag(\theta) - b)^2] = E_\theta[(a(\delta - g(\theta))^2] = a^2 E_\theta[(\delta - g(\theta)^2] = a^2 R(g(\theta), \delta)$$

Observe que, se δ é ENVVUM de $g(\theta)$, e sendo U o conjunto de todos os estimadores não viciados de 0, uma condição necessária e suficiente para que δ seja ENVVUM de $g(\theta)$ é que

$$E_\theta[\delta U] = 0, \forall u \in U, \forall \theta \in \Omega$$

Observe que δ' é não viciado para $g'(\theta)$

$$E_\theta[\delta'] = E_\theta[a\delta + b] = aE_\theta[\delta] + b = ag(\theta) + b = g'(\theta), \forall \theta \in \Omega$$

Além disso, como $E^2_\theta[\delta] < \infty, \forall \theta \in \Omega$, então $Var_\theta(\delta) < \infty$ e $E_\theta[\delta] < \infty$,$\forall \theta \in \Omega$, logo

$$E_\theta[\delta'^2] = Var_\theta(\delta') + E^2_\theta[\delta'] = a^2 Var_\theta(\delta) + (aE_\theta[\delta] + b)^2 < \infty$$

Como δ' é não viciado e tem segundo momento finito, uma condição necessária e suficiente para ser ENVVUM de $g'(\theta)$ é ser não correlacionado com todo estimador não viciado de zero, observe que

$$E_\theta[\delta' U] = E_\theta[(a\delta + b)U] = aE_\theta[\delta U] + bE_\theta[U] = 0, \forall u \in U, \forall \theta \in \Omega$$

Se δ é estimador minimax de $g(\theta)$, então

$$\sup_\theta R(ag(\theta) + b, a\delta + b) = \inf_{\delta^*} \sup_\theta R(ag(\theta) + b, a\delta^* + b)$$

Observe que

$$R(g'(\theta), \delta') = R(ag(\theta) + b, a\delta + b) = a^2 R(g(\theta), \delta)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sup_\theta R(g'(\theta), \delta') &= \sup_\theta a^2 R(g(\theta), \delta) = a^2 \inf_{\delta^*} \sup_\theta R(g(\theta), \delta^*) \\ &= \inf_{\delta^*} \sup_\theta a^2 R(g(\theta), \delta^*) = \inf_{\delta^*} \sup_\theta R(ag(\theta) + b, a\delta^* + b)\end{aligned}$$

Logo, δ' é estimador minimax de $g'(\theta)$.
Por fim, se δ é admissível para $g(\theta)$, então não exite outro estimador risco menor para todo θ pertecente ao espaço paramétrico. Sob perda quadrática,

$$R(g'(\theta), \delta') = a^2 R(g(\theta), \delta) < a^2 R(g(\theta), \delta^*) = R(ag(\theta) + b, a\delta^* + b), \forall \theta \in \Omega$$

Logo, $\delta' = a\delta + b$, com $a, b \in R$ e $a \neq 0$ é admissível para $g'(\theta)$.