UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Programa de Post-Graduação em Estatística

Katerine Zuniga Lastra, Marília de Melo Sombra, Alex Monito Nhancololo

Lista 04 – Semestre de 2024-II – Prof. Silvia Ferrari

3. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}\exp(-|x|/\theta), x \in \mathcal{R}; \theta > 0.$$

(a) Sem usar propriedades de famílias com razão de verossimilhanças monótonas, obtenha o teste uniformemente mais poderoso de $\mathrm{H}: \theta \leq \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta > \theta_0$ de nível α.

Observe inicialmente que, a densidade conjunta é dada por

$$\begin{aligned}
p_\theta(\boldsymbol{x}) &\overset{\text{ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta}\exp\left\{-\frac{|x_i|}{\theta}\right\}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \frac{1}{(2\theta)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)
\end{aligned}$$

Sabemos que, pelo Lema de Neyman-Pearson, um teste ϕ é mais poderoso de nível α para testar $H^*: \theta = \theta_0$ contra $K^*: \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$ se satisfaz

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & p_{\theta_1}(\boldsymbol{x}) > kp_{\theta_0}(\boldsymbol{x}) \\ 0, & p_{\theta_1}(\boldsymbol{x}) < kp_{\theta_0}(\boldsymbol{x}). \end{cases} \quad \text{e} \quad E_{\theta_0}[\phi(\boldsymbol{X})] = \alpha$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{(2\theta_1)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\} > k\frac{1}{(2\theta_0)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\} \\
&\Leftrightarrow \exp\left\{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\} > k\left(\frac{2\theta_1}{2\theta_0}\right)^n \\
&\Leftrightarrow \exp\left\{\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\} > k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^{n}|x_i| > \log\left(k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i| > \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)^{-1}\log\left(k\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i| > k'
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow & \frac{1}{(2\theta_1)^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^n |x_i|\right\} < k\frac{1}{(2\theta_0)^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^n |x_i|\right\} \\
\Leftrightarrow & \exp\left\{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^n |x_i| + \frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^n |x_i|\right\} < k\left(\frac{2\theta_1}{2\theta_0}\right)^n \\
\Leftrightarrow & \exp\left\{\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^n |x_i|\right\} < k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^n |x_i| < \log\left(k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right) \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^n |x_i| < \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)^{-1} \log\left(k\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right) \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^n |x_i| < k'
\end{aligned}
$$

Portanto, um teste mais poderoso de nível α é dado como segue

$$
\phi^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^n |x_i| > k' \\ 0, \sum_{i=1}^n |x_i| \leq k' \end{cases},
$$

em que k' é tal que $E_{\theta_0}[\phi^*(\boldsymbol{X})] = \alpha$.

Assim, usando o fato que se $X_i \sim \text{Laplace}(0, \theta)$, então $|X_i| \sim \text{Exp}(0, \theta)$, e $\sum_{i=1}^n |X_i| \sim \text{Gama}\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$, logo $\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n |X_i| \sim \mathcal{X}_{2n}^2$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\alpha = E_{\theta_0}[\phi^*(\boldsymbol{X})] \Leftrightarrow & P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n |X_i| > k'\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow & P_{\theta_0}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n |X_i| > \frac{2}{\theta_0}k'\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow & P\left(\mathcal{X}_{2n}^2 > \frac{2}{\theta_0}k'\right) = \alpha
\end{aligned}
$$

Sendo $q_{1-\alpha}$ o quantil $1-\alpha$ de uma distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade, então

$$
\frac{2k'}{\theta_0} = q_{1-\alpha} \Leftrightarrow k' = \frac{\theta_0 q_{1-\alpha}}{2}
$$

Sendo assim, pelo LNP, o teste dado por

$$
\phi^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^n |x_i| > \frac{\theta_0 q_{1-\alpha}}{2} \\ 0, \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{\theta_0 q_{1-\alpha}}{2} \end{cases},
$$

é mais poderoso de nível α para testar $H^* : \theta = \theta_0$ contra $K^* : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$. Como isso vale para todo $\theta_1 > \theta_0$ e o teste não depende de θ_1, então ele é UMP de nível α para testar $H^* : \theta = \theta_0$ contra $K : \theta > \theta_0$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
E_\theta[\phi^*(\boldsymbol{X})] &= P_\theta\left(\sum_{i=1}^n |X_i| > \frac{\theta_0 q_{1-\alpha}}{2}\right) \\
&= P_\theta\left(\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n |X_i| > \frac{2}{\theta}\frac{\theta_0 q_{1-\alpha}}{2}\right) \\
&= P\left(\mathcal{X}_{2n}^2 > \frac{\theta_0}{\theta} q_{1-\alpha}\right), \forall \theta > 0.
\end{aligned}
$$

Como $\theta \leq \theta_0$ então $\frac{\theta_0}{\theta} \geq 1$, logo

$$E_\theta[\phi^*(\boldsymbol{X})] = P\left(\mathcal{X}^2_{2n} > \frac{\theta_0}{\theta} q_{1-\alpha}\right) \leq P_\theta\left(\mathcal{X}^2_{2n} > q_{1-\alpha}\right) = \alpha, \forall \theta \leq \theta_0$$

Assim, concluimos que o teste $\phi^*(x)$ é UMP para as hipóteses $H : \theta \leq \theta_0$ contra $K : \theta > \theta_0$

(b) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $\mathrm{H} : \theta = \theta_0$ **contra** $\mathrm{K}' : \theta \neq \theta_0$ **de nível** α**.**

Seja $L(\theta; \boldsymbol{x})$ a verossimilhança de $\boldsymbol{X}$ com densidade $p_\theta(\boldsymbol{x})$. Definimos $\Omega = \theta > 0$ e $\Omega_H = \theta = \theta_0$, onde $\theta_0 > 0$. A razão de verossimilhanças generalizada é λ.

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_H} L(\theta; \boldsymbol{x})}{\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta; \boldsymbol{x})} = \frac{L(\theta_0, \boldsymbol{x})}{L(\hat{\theta}, \boldsymbol{x})},$$

em que $\hat{\theta}$ é EMV de θ.

A função de log-verossimilhança para θ é dada como;

$$l(\theta, \boldsymbol{x}) = \log(L(\theta; \boldsymbol{x})) = -n \log(2\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Portanto, valem as seguintes 2 equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\theta, \boldsymbol{x})}{\partial \theta} = 0 &\iff -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\
&\iff \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \frac{n}{\theta} \\
&\iff \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = n \\
&\iff \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\theta, \boldsymbol{x})}{\partial \theta^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 l(\theta, \boldsymbol{x})}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) \\
&= \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
&= \frac{1}{\theta^2}\left(n - \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)
\end{aligned}$$

Dado que $\left.\frac{\partial^2 l(\theta, \boldsymbol{x})}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|} < 0$, conclui-se que $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ é o estimador de máxima verossimilhança para θ. Assim:

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x}) &= \frac{\frac{1}{(2\theta_0)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^n|x_i|\right\}}{\frac{1}{(2\hat{\theta})^n}\exp\left\{-\frac{1}{\hat{\theta}}\sum_{i=1}^n|x_i|\right\}} \\
&= \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^n|x_i| + \frac{1}{\hat{\theta}}\sum_{i=1}^n|x_i|\right\} \\
&= \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{\left(\frac{1}{\hat{\theta}} - \frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^n|x_i|\right\} \\
&= \left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|x_i|\right)^n \exp\left\{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n|x_i|} - \frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^n|x_i|\right\} \\
&= \exp\left\{\left(n - \frac{\sum_{i=1}^n|x_i|}{\theta_0}\right) + n\log\left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|x_i|\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-n\left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|x_i| - \log\left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|x_i|\right) - 1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

O teste de razão de verossimilhanças rejeita H se

$$\lambda(\boldsymbol{X}) < k, k \in [0,1].$$

sabemos que a função exponencial é uma função estritamente crescente, então, rejeitamos H de modo que;

$$
\begin{aligned}
-n\left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|X_i| - \log\left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|X_i|\right) - 1\right) &< k \\
\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|X_i| - \log\left(\frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|X_i|\right) - 1 &> k^*
\end{aligned}
$$

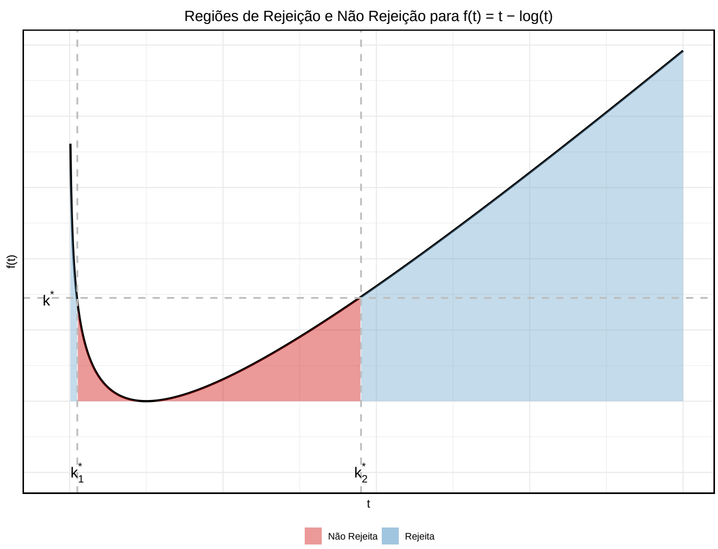
Seja $T = \frac{1}{n\theta_0}\sum_{i=1}^n|X_i|$, podemos escrever a razão de verossimilhança como uma função de T.

$$f(t) = t - \log(t) - 1 > k^*$$

Analisamos o comportamento de $f(t)$;

- Se $T \to 0 \Rightarrow f(t) \to \infty$, isto é, $t = 0$ é assíntota vertical.
- Se $t \to \infty \Rightarrow f(w) \to \infty$
- $f'(t) = 1 + \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow w = 1$, isto é, $w = 1$ é ponto crítico de $f(t)$.
- $f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0, \text{logo} \, f(t)$ é função convexa.

A figura abaixo mostra a função $f(t)$, e o teste rejeita H se $T < k_1^*$ ou $T > k_2^*$, ou seja, se $\lambda(\boldsymbol{X}) < k$, e $E_{\theta_0}[\phi(\boldsymbol{X})] = \alpha$. Assim



$$
\begin{aligned}
\alpha = E_{\theta_0}[\phi(\boldsymbol{X})] &= P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i| < k_1^*\right) + P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i| > k_2^*\right) \\
&= P_{\theta_0}\left(\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|X_i| < \frac{2k_1^*}{\theta}\right) + P_{\theta_0}\left(\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|X_i| > \frac{2k_2^*}{\theta}\right) \\
&= P_{\theta_0}\left(\mathcal{X}_{2n}^2 < \frac{2k_1^*}{\theta_0}\right) + P_{\theta_0}\left(\mathcal{X}_{2n}^2 > \frac{2k_2^*}{\theta_0}\right) \\
&\Rightarrow \frac{2k_1^*}{\theta_0} = q_{\alpha_1} \text{ e } \frac{2k_2^*}{\theta_0} = q_{1-\alpha_2} \\
&\Rightarrow k_1^* = \frac{\theta_0 q_{\alpha_1}}{2} \text{ e } k_2^* = \frac{\theta_0 q_{1-\alpha_2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que o teste da razão de verossimilhança de nível α é:

$$
\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } \sum_{i=1}^{n}|x_i| < \frac{\theta_0 q_{\alpha_1}}{2} \text{ ou } \sum_{i=1}^{n}|x_i| > \frac{\theta_0 q_{1-\alpha_2}}{2} \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}
$$

Especificamente, considere $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

(c) Obtenha uma quantidade pivotal que depende dos dados apenas através de uma estatística suficiente minimal e determine um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha; \alpha \in (0,1)$.

Verificamos que $\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ é uma estatística suficiente minimal, pela familia exponencial;

$$
\begin{aligned}
p_\theta(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\theta)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + n\log(2\theta)\right\}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \\
&= \exp\{\eta T(\boldsymbol{x}) - A(\eta)\}h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

isto é, a família de possíveis distribuições de $\mathcal{P}$ pertence a família exponencial unidimensional na forma canônica

$$\eta = -\frac{1}{\theta} \to A(\eta) = -n\log(2\theta) = -n\log\left(-\frac{2}{\eta}\right),$$

$$T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \text{ e } h(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

O espaço paramétrico canônico é definido como $\Delta = \eta : \eta \in \mathbb{R}^-$ e inclui intervalos abertos unidimensionais. Em outras palavras, existe um subconjunto $B \subset \Delta$, onde $B = a < \eta < b$, com $-\infty < a < b < 0$. Neste contexto, o parâmetro canônico η e a estatística suficiente T não estão sujeitos a restrições lineares. Assim, a família de distribuições possíveis para o vetor aleatório $\boldsymbol{X}$ forma uma família exponencial de posto completo. Isso implica que a estatística $T = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ é completa e suficiente para $\mathcal{P}$, o que significa que $T(\boldsymbol{X})$ é também minimalmente suficiente. Portanto, a função $Q(\boldsymbol{X}, \theta)$ depende de $\boldsymbol{X}$ apenas através de uma estatística suficiente minimal.

Então, seja $Q(\boldsymbol{X}, \theta) = \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} |X_i|$, com $Q \sim \mathcal{X}^2_{2n}$ do item (a), uma quantidade pivotal(Q). Assim, um intervalo de confiança para θ com nível $1-\alpha$ é dado por;

$$\begin{aligned}
&P_\theta\left(q_{\alpha_1} < Q < q_{1-\alpha_2}\right) = 1-\alpha \\
\Rightarrow &P_\theta\left(q_{\alpha_1} < \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} |X_i| < q_{1-\alpha_2}\right) = 1-\alpha \\
\Rightarrow &P_\theta\left(\frac{q_{\alpha_1}}{2\sum_{i=1}^{n} |X_i|} < \frac{1}{\theta} < \frac{q_{1-\alpha_2}}{2\sum_{i=1}^{n} |X_i|}\right) = 1-\alpha \\
\Rightarrow &P_\theta\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{q_{1-\alpha_2}} < \theta < \frac{2\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{q_{\alpha_1}}\right) = 1-\alpha
\end{aligned}$$

em que q_α é o quantil α da distribuição $\mathcal{X}^2_{2n}$. Assim, se definirmos $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, temos que,

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta) = \left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{2\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

(d) Obtenha um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Seja $0 < \theta_0 < \theta_1$ e considere a razão de verossimilhanças a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{\theta_1}}{p_{\theta_0}} &= \frac{\frac{1}{(2\theta_1)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right\}}{\frac{1}{(2\theta_0)^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right\}} \\
&= \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right\}
\end{aligned}$$

A função $p_\theta(x)$ possui uma razão de verossimilhança monótona em $t = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Como $F_\theta(t)$ é contínua em t e θ, existe um limite superior de confiança, $\bar{\theta}$, para θ, com nível de confiança $1-\alpha$, que é uniformemente mais acurado pode ser encontrado resolvendo

$$\begin{aligned}
F_\theta(t) = \alpha &\Rightarrow P_\theta(T \le t) = \alpha \\
&\Rightarrow P_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} |X_i| \le t\right) = \alpha \\
&\Rightarrow P_\theta\left(\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} |X_i| \le \frac{2}{\theta}t\right) = \alpha \\
&\Rightarrow P_\gamma\left(\mathcal{X}^2_{2n} \le \frac{2}{\theta}t\right) = \alpha.
\end{aligned}$$

Se q_α é o quantil α da distribuição $\mathcal{X}^2_{2n}$, então

$$\bar{\theta}(T) = \frac{2T}{q_\alpha}$$

Questão 5.
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $U(0, \theta)$.

(a) Mostre que, para testar $H : \theta \leq \theta_0$ contra $K : \theta > \theta_0$, qualquer teste para o qual $E_{\theta_0}(\phi(X)) = \alpha$, $E_\theta(\phi(X)) \leq \alpha$, para $\theta \leq \theta_0$, e $\phi(x) = 1$ quando $\max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0$, é UMP de nível α. Sugestão: Use o Lema de Neyman Pearson, com $k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$.

Observe inicialmente que

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{j=1}^{n} \mathrm{I}_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_{(n)} = \max(x_1, \ldots, x_n)$$

Pelo Lema de Neyman-Pearson, um teste que satisfaz

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & p_1(x) > kp_0(x) \\ 0, & p_1(x) < kp_0(x) \end{cases} \quad \text{e} \quad E_{\theta_0}(\phi(X)) = \alpha \tag{1}$$

é MP para testar $H^* : \theta = \theta_0$ contra $K^* : \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$.
Assim, note que

$$\begin{aligned} \phi(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\theta_1^n}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) > k\frac{1}{\theta_0^(n)}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) > k\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) \end{aligned}$$

usando $k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(x) = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) > \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{(n)} < \theta_1 \quad \text{e} \quad x_{(n)} > \theta_0, \text{ com } \theta_1 > \theta_0 \\ &\Leftrightarrow x_{(n)} > \theta_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\theta_1^n}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) < k\frac{1}{\theta_0^n}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) < k\mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) \end{aligned}$$

usando $k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(x) = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) < \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) = 1 \\ &\Leftrightarrow x_{(n)} > \theta_1 \quad \text{e} \quad x_{(n)} < \theta_0, \text{ com } \theta_1 > \theta_0 \text{ (impossível)} \end{aligned}$$

logo, um teste que satisfaz $\phi(x) = 1$ quando $x_{(n)} < \theta_0$ e $E_{\theta_0}(\phi(X)) = \alpha$ é MP para testar $H^* : \theta = \theta_0$ contra $K^* : \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$.

Considere o teste

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{(n)} > c\theta_0, \quad c \in (0,1) \\ 0, & cc \end{cases}$$

em que c é tal que $E_{\theta_0}(\phi(X)) = \alpha$, logo,

$$\begin{aligned} &P_{\theta_0}(X_{(n)} > c\theta_0) = \alpha \\ &\Leftrightarrow 1 - P_{\theta_0}(X_{(n)} \leq c\theta_0) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{c\theta_0}{\theta_0}\right)^n = 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow c = (1-\alpha)^{1/n} \end{aligned}$$

Assim, o teste

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{(n)} > (1-\alpha)^{1/n}\theta_0 \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

é MP de nível α para testar $H^* : \theta = \theta_0$ contra $K^* : \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$. Como isso vale para todo $\theta_1 > \theta_0$ e o teste não depende de θ_1, então ele é UMP para testar $H^* : \theta = \theta_0$ contra $K : \theta_1 > \theta_0$. Além disso, para $\theta \leq \theta_0$,

$$E_\theta(\phi(X)) = P_\theta(X_{(n)} > (1-\alpha)^{1/n}\theta_0) = 1 - P_\theta(X_{(n)} \leq (1-\alpha)^{1/n}\theta_0)$$

Se $(1-\alpha)^{1/n}\theta_0 < \theta$

$$E_\theta(\phi(X)) = 1 - \left(\frac{(1-\alpha)^{1/n}\theta_0}{\theta}\right)^n = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \leq 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

pois $\frac{\theta_0}{\theta} \geq 1$.
Se $(1-\alpha)^{1/n}\theta_0 > \theta$

$$E_\theta(\phi(X)) = 0 \leq \alpha$$

Logo, como $E_\theta(\phi(X)) \leq \alpha$, o teste $\phi(x)$ é UMP de nível α para testar $H : \theta \leq \theta_0$ contra $K : \theta > \theta_0$.

(b) Mostre que, para testar $\mathrm{H} : \theta = \theta_0$ **contra** $\mathrm{K} : \theta \neq \theta_0$**, o teste** $\phi(x) = 1$ **quando** $\max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0$ **ou** $\max(x_1, \ldots, x_n) \leq \theta_0\alpha^{1/n}$ **e** $\phi(x) = 0$**, caso contrário, é UMP de nível** α**. Sugestão: Considere separadamente 3 situações: (i)** $\mathrm{H} : \theta = \theta_0$ **contra** $\mathrm{K}_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$**; (ii)** $\mathrm{H} : \theta = \theta_0$ **contra** $\mathrm{K}_2 : \theta = \theta_1, \theta_0\alpha^{1/n} < \theta_1 < \theta_0$**; (iii)** $\mathrm{H} : \theta = \theta_0$ **contra** $\mathrm{K}_3 : \theta = \theta_1 \leq \theta_0\alpha^{1/n}$**.**

Considere testar $H : \theta = \theta_0$ contra $K^{**} : \theta \neq \theta_0$ com o seguinte teste

$$\phi^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{quando } x_{(n)} > \theta_0 \text{ ou } x_{(n)} \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}} \\ 0, & \text{quando } \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}} < x_{(n)} \leq \theta_0 \end{cases} \tag{2}$$

Para testar H contra K^{**} consideramos separadamente 3 situações:

i. H contra $K_1 : \theta = \theta_1\,(\theta_1 > \theta_0)$.

ii. H contra $K_2 : \theta = \theta_1 \left(\theta_0\alpha^{\frac{1}{n}} < \theta_1 < \theta_0\right)$.

iii. H contra $K_3 : \theta = \theta_1 \left(\theta_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}\right)$

Caso (i): H **contra** $K_1 : \theta = \theta_1 \, (\theta_1 > \theta_0)$ **:**

Pelo lema de Neyman-Pearson no item (a), qualquer teste que satisfaça as condições 1 é um teste MP de nível α para testar H contra K_1. Verificamos que a primeira condição da equação 1 é satisfeita por (2), restando verificar so a segunda condição de 1 usando a função poder a seguir:

$$\begin{aligned}
B(\theta) &= E_\theta[\phi^*(\boldsymbol{X})] \\
&= P_\theta\left(X_{(n)} > \theta_0\right) + P_\theta\left(X_{(n)} \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= 1 - P_\theta\left(X_{(n)} \leq \theta_0\right) + P_\theta\left(X_{(n)} \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= 1 - \left[P_\theta\left(X_1 \leq \theta_0\right)\right]^n + \left[P_\theta\left(X_1 \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}\right)\right]^n \\
&= 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n + \left(\frac{\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}}{\theta}\right)^n \\
&= 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n (1-\alpha).
\end{aligned}$$

Sabe-se que $E_{\theta_0}[\phi^*(\boldsymbol{X})] = \alpha$, pois $E_\theta[\phi^*(\boldsymbol{X})] = \alpha$ para todo $\theta \in \Omega_H$. Concluímos, então, que o teste na equação 2 é MP de nível α para testar H contra K_1. Portanto, é UMP para testar H contra $K_1 : \theta > \theta_0$.

Caso (ii): H contra $K_2 : \theta = \theta_1 \left(\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} < \theta_1 < \theta_0\right)$.

Pelo lema de NP, de forma análoga ao item (a), tem-se o seguinte;

$$p_{\theta_1}(\boldsymbol{x}) > k p_{\theta_0}(\boldsymbol{x}) \implies \theta_0 \leq x_{(n)} < \theta_1.$$

Assumindo $k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$, a condição $\theta_0 < x_{(n)} \leq \theta_1$ é impossível,, pois, por hipótese, $\theta_1 < \theta_0$ e $\theta_1 < \theta_0 < x_{(n)}$ também não ocorre. Pelo lema de Neyman-Pearson, o teste de nível α mais poderoso para H contra K_2 satisfaz essas condições.

$$\begin{aligned}
\phi^*(\boldsymbol{x}) &= 0, \text{ quando } x_{(n)} > \theta_1 \text{ e}, \\
E_{\theta_0}[\phi^*(\boldsymbol{X})] &= \alpha.
\end{aligned}$$

Observamos que a equação 2 satisfaz $\phi^*(\boldsymbol{x}) = 0$ quando $x_{(n)} > \theta_1 > \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}$, com $\theta_1 < \theta_0$. Similarmente ao caso (i), o teste em 2 para H contra K_2 possui nível α, ou seja, $E_{\theta_0}[\phi^*(\boldsymbol{x})] = \alpha$. Concluímos, então, que o teste em 2 é MP de nível α para H contra K_2, sendo UMP para H contra $K_2 : \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} < \theta < \theta_0$.

Caso (iii): H contra $K_3 : \theta = \theta_1 \left(\theta_1 \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}\right)$.

Pelo lema de NP, de forma análoga ao item (a), tem-se o seguinte;

$$\begin{aligned}
p_{\theta_1}(\boldsymbol{x}) > k p_{\theta_0}(\boldsymbol{x}) &\implies \theta_0 \leq x_{(n)} < \theta_1 \\
p_{\theta_1}(\boldsymbol{x}) < k p_{\theta_0}(\boldsymbol{x}) &\implies \theta_1 \leq x_{(n)} < \theta_0.
\end{aligned}$$

Assumindo $k = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$, a condição $\theta_0 < x_{(n)} \leq \theta_1$ é impossível, pois consideramos que $\theta_1 \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} < \theta_0$. Além disso, a condição $\theta_1 \leq \theta_0 \leq x_{(n)}$ também não ocorre. Pelo lema de Neyman-Pearson, qualquer teste que satisfaça essas condições é MP de nível α para H contra K_3.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ quando } x_{(n)} > \theta_1 \text{ e},$$

$$E_{\theta_0}[\phi(\boldsymbol{X})] = \alpha.$$

Considere assim, o teste

$$\phi'(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \gamma, \text{ se } x_{(n)} \leq \theta_1 \\ 0, x_{(n)} > \theta_1. \end{cases}$$

O poder do teste $\phi'(\boldsymbol{x})$ é dado por:

$$\begin{aligned} B_{\phi'}(\theta) &= E_\theta\left[\phi'(\boldsymbol{X})\right], \forall\theta = \theta_1 \left(\theta_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n P_\theta\left(X_{(n)} \leq \theta_1\right) \\ &= \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \left[P_{\theta_1}\left(X_1 \leq \theta_1\right]^n\right. \\ &= \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \left(\frac{\theta_1}{\theta_1}\right)^n \\ &= \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que o poder do teste $\phi^*(\boldsymbol{x})$ é dado por:

$$\begin{aligned} B^*_\phi(\theta) &= E_\theta[\phi^*(\boldsymbol{X})], \forall\theta = \theta_1 \left(\theta_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= P_{\theta_1}\left(X_{(n)} > \theta_0\right) + P_{\theta_1}\left(X_{(n)} \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= P_{\theta_1}\left(X_{(n)} \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \left[P_{\theta_1}\left(X_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}\right)\right]^n \\ &= \left(\frac{\theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}}{\theta_1}\right)^n \\ &= \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \end{aligned}$$

Na terceira igualdade sob K_3, temos $P_{\theta_1}(X_{(n)} > \theta_0) = 0$ com $\theta_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}} \leq \theta_0$, o teste ϕ tem o mesmo poder que um teste MP de nível α, ou seja, $B^*_\phi(\theta) = B_{\phi'}(\theta)$. Assim, ϕ é também um teste MP de nível α para H contra K_3. Como vimos no caso (i), $E_{\theta_0}[B^*_\phi(\theta)] = \alpha$. Concluímos então que o teste em 2 é MP de nível α para H contra K_3 e, portanto é UMP para H contra $K_3 : \theta_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}$, já que a decisão de rejeitar H independe do valor específico de θ_1 para rejeitar H quando $\theta_0 > \theta_1$.

Por fim, 2 é um teste UMP de nível α para testar $H : \theta = \theta_0$ contra $K_1 : \theta > \theta_0, K_2 : \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}} < \theta < \theta_0$, e $K_3 : \theta_1 \leq \theta_0\alpha^{\frac{1}{n}}$. Logo, é também um teste UMP de nível α para testar $H : \theta = \theta_0$ contra $K^{**} : \theta \neq \theta_0$.

7.Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes tais que X_i tem distribuição exponencial de média $(\lambda\beta^i)^{-1}$; $\lambda > 0$, $\beta > 0$. Suponha que β é conhecido.

(a) Encontre um limite inferior de confiança uniformemente mais acurado para λ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

Observe inicialmente que

$$p_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\beta^i \exp\{-x_i\lambda\beta^i\} = \lambda^n \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i\} \prod_{i=1}^{n} \beta^i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \lambda, \beta > 0, \beta \text{ conhecido}$$

Assim, a razão de verossimilhanças é dada por

$$\frac{p_{\lambda_1}}{p_{\lambda_0}} = \frac{\lambda_1^n \exp\{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i\beta^i\} \prod_{i=1}^n \beta^i}{\lambda_0^n \exp\{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i\beta^i\} \prod_{i=1}^n \beta^i} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n \exp\left\{-(\lambda_1 - \lambda_0) \prod_{i=1}^{n} \beta^i\right\}$$

Assim, $p_{\lambda_1}/p_{\lambda_0}$ tem razão de verossimilhança monótona em $T(x) = -\sum_{i=1}^n x_i\beta^i$. Além disso, como $F_\lambda(t)$ é função contínua em cada variável t e θ quando a outra está fixa, então existe um limite inferior de confiança uniformemente mais acurado $\underline{\lambda}$ para λ com nível de confiança $1-\alpha$ como solução de $F_\lambda(t) = 1 - \alpha$.

Observe inicialmente que, como $X_i \sim Exp((\lambda\beta^i)^{-1})$, fazendo $Y_i = X_i\beta^i$, temos que

$$P(X_i\beta^i \leq y) = P(X_i \leq y/\beta^i) = F_{X_i}(y/\beta^i)$$

assim

$$P(Y_i = y) = \lambda\beta^i \exp\left\{-\frac{y}{\beta^i}\lambda\beta^i\right\} \frac{1}{\beta^i} = \lambda \exp\{-y\lambda\}$$

logo, $Y_i \sim Exp(\lambda)$, então $\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n X_i\beta^i \sim Gama(n, \lambda)$, e $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i\beta^i \sim \chi^2_{2n}$. Desse modo

$$\begin{aligned}
F_\lambda(t) = 1 - \alpha &\Leftrightarrow P_\lambda(T \leq t) = 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow P_\lambda\left(-\sum_{i=1}^n X_i\beta^i \leq t\right) = 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow P_\lambda\left(\sum_{i=1}^n X_i\beta^i > -t\right) = 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow 1 - P_\lambda\left(\sum_{i=1}^n X_i\beta^i \leq -t\right) = 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow P_\lambda\left(2\lambda\sum_{i=1}^n X_i\beta^i \leq -2\lambda t\right) = \alpha \\
&\Leftrightarrow P\left(\chi^2_{2n} \leq -2\lambda t\right) = \alpha
\end{aligned}$$

Sendo $\chi^2_{2n,\alpha}$ o quantil α de uma distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade, temos que

$$-2\lambda t = \chi^2_{2n,\alpha} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2t} = \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\sum_{i=1}^n X_i\beta^i}$$

(b) Mostre que $\lambda \sum X_i\beta^i$ é uma quantidade pivotal.
Observe que, como $X_i \sim Exp((\lambda\beta^i)^{-1})$, então para $Y_i = X_i\beta^i$, temos que

$$P(X_i\beta^i \leq y) = P(X_i \leq y/\beta^i) = F_{X_i}(y/\beta^i)$$

assim

$$P(Y_i = y) = \lambda\beta^i \exp\left\{-\frac{y}{\beta^i}\lambda\beta^i\right\} \frac{1}{\beta^i} = \lambda \exp\{-y\lambda\}$$

logo, $Y_i \sim Exp(\lambda)$, assim $\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n X_i\beta^i \sim Gama(n, \lambda)$, então $\lambda\sum_{i=1}^n X_i\beta^i \sim Gama(n, 1)$. Portanto, com $\lambda\sum_{i=1}^n X_i\beta^i$ é função da amostra e do parâmetro λ, mas sua distribuição não depende de λ, concluimo que $\lambda\sum_{i=1}^n X_i\beta^i$ é uma quantidade pivotal.

(c) Construa um intervalo de confiança para λ com coeficiente de confiança γ baseado na quantidade pivotal dada em (b).

Usando o fato que $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i \sim \chi^2_{2n}$, podemos contruir um intervalo de confiança para λ com coeficiente de confiança $1-\alpha$ dado por:

$$P_\lambda\left(\chi^2_{2n,\alpha_1} \leq 2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i \leq \chi^2_{2n,\alpha_2}\right) = 1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow P_\lambda\left(\frac{\chi^2_{2n,\alpha_1}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{2n,\alpha_2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i}\right) = 1-\alpha$$

Assim,

$$IC(\lambda, 1-\alpha) = \left[\frac{\chi^2_{2n,\alpha_1}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i}, \frac{\chi^2_{2n,\alpha_2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i}\right]$$

Para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, temos

$$IC(\lambda, 1-\alpha) = \left[\frac{\chi^2_{2n,\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i}, \frac{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i\beta^i}\right]$$

(d) Suponha que, a priori, λ tem distribuição gama de parâmetros $a > 0$ e $b > 0$, e função densidade de probabilidade

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)}\lambda^{a-1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{b}\right\}, \quad \lambda > 0.$$

Encontre o estimador de Bayes de λ sob perda quadrática.

Primeiramente vamos obter a distribuição a posteriori, dada por

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda|x) &= f(x|\lambda)\pi(\lambda) \\
&= \lambda^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i\right\}\prod_{i=1}^{n}\beta^i\frac{1}{b^a\Gamma(a)}\lambda^{a-1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{b}\right\} \\
&\propto \lambda^{n+a-1}\exp\left\{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right)\right\}, \quad \lambda, a, b, \beta > 0
\end{aligned}$$

Observe que $\lambda|x \sim Gama(n+a, \sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b})$

Assim, sob perda quadrática, $l(\lambda, d) = (d-\lambda)^2$, o estimador de Bayes é dado por

$$\delta(x) = E[\lambda|x] = \frac{n+a}{\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}}$$

(e) No contexto do item (d), suponha que a é inteiro ($a \geq 1$) e obtenha um intervalo de credibilidade para λ da forma $(\tilde{\lambda}, +\infty)$ com probabilidade $1-\alpha$.

Usando o fato que $\lambda|x \sim Gama(n+a, \sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b})$, então $2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right) \times \lambda|x \sim Gama(n+a, 1/2) \stackrel{d}{=} \chi^2_{2(n+a)}$, assim, temos que

$$\begin{aligned}
&P\left(\lambda|x \geq \tilde{\lambda}\right) = 1-\alpha \\
\Leftrightarrow\ &1 - P\left(\lambda|x < \tilde{\lambda}\right) = 1-\alpha \\
\Leftrightarrow\ &P\left(\lambda|x < \tilde{\lambda}\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ &P\left(2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right)\lambda|x < 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right)\tilde{\lambda}\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ &P\left(\chi^2_{2(n+a)} < 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right)\tilde{\lambda}\right) = \alpha
\end{aligned}$$

Assim,

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right)\tilde{\lambda} = \chi^2_{2(n+a),\alpha}$$

em que $\chi^2_{2(n+a),\alpha}$ representa o quantil α de uma distribui qui-quadrado com $2(n+a)$ graus de liberdade.

$$\tilde{\lambda} = \frac{\chi^2_{2(n+a),\alpha}}{2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta^i + \frac{1}{b}\right)}.$$

Questão 9. Considere uma única observação de uma variável aleatória X.

(a) Use o Lema de Neyman-Pearson para encontrar o teste mais poderoso de nível α de $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1,b)$, sendo $b > 1$ fixado. Se $\alpha = 0.05$ e foi observado $x = 0.1$, qual é sua decisão? Qual é o nível descritivo (p-valor) do teste?

Resolução

Pelo lema de Neyman Pearson podemos definir o seguinte teste.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_K(x) > kf_H(x) \quad \text{(região de rejeião de H)} \\ 0 & \text{se } f_K(x) < kf_H(x) \quad \text{(região de não rejeião de H)}, \end{cases}$$

que para

$$\mathbf{E}_H[\phi(x)] = \alpha,$$

é um teste mais poderoso de nível α para testar H contra K.

$$f_K(x) = \frac{1}{B(1,b)} x^{1-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \text{ e } \quad f_H(x) = \mathbf{I}_{(0,1)}(x)$$

$$\begin{aligned}
f_K(x) &> kf_H(x) \\
\frac{1}{B(1,b)} x^{1-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) &> k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \\
\frac{1}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(b)}{\Gamma(1+b)}} x^{1-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) &> k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \\
\frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1)\Gamma(b)} x^{1-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) &> k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \\
\frac{b!}{0!(b-1)!} x^{1-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) &> k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \\
\frac{b(b-1)!}{(b-1)!} x^{0}(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) &> k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \\
b(1-x)^{b-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) &> k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b > 0 \\
b(1-x)^{b-1} &> k,\ b > 0 \\
(1-x)^{b-1} &> \frac{k}{b},\ b > 0 \\
(1-x) &> \left(\frac{k}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} \\
-x &> \left(\frac{k}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} - 1 \\
x &< \underbrace{1 - \left(\frac{k}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}}_{k'} \\
x &< k'
\end{aligned}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < k' \\ 0 & \text{se } x > k', \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_H[\phi(x)] &= \alpha \\
P_H(x < k') &= \alpha \\
\int_0^{k'} dx &= \alpha,\ \text{H: } X \sim U(0,1) \\
X\Big|_0^{k'} &= \alpha \\
k' &= \alpha
\end{aligned}$$

Assim,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } < \alpha \\ 0 & \text{se } x \geq \alpha, \end{cases}$$

é um teste mais poderoso de nível α para testar $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1,b)$, sendo $b > 1$ fixado.

Se $x = 0,1$ e $\alpha = 0,05$ tem-se:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0,1 < 0,05 \text{ (absurdo!)} \\ 0 & \text{se } 0,1 \geq 0,05 \quad \text{(região de não rejeião de H)} \end{cases}$$

logo, não há evidência para rejeição de H, pois 0,1 está na região de não rejeião de H.

valor-p $\hat{p}(x) = \inf\{\alpha : x \in S_\alpha\}$, onde $S_\alpha = \{x : x < \alpha\}$ é região de rejeição.

$\hat{p}(x) = \inf \alpha : x \in S_\alpha$

$\hat{p}(x) = \inf\{\alpha : 0 < x < \alpha\}$

$\hat{p}(x) = \inf\{\alpha : 0 < 0,1 < \alpha\}$

$\hat{p}(x) = 0,1$

Como $\hat{p}(x) = 0,1 > 0,05$, ao nível de significância de 5%, não há evidência para rejeitar a hipótese H.

(b) O teste obtido em (a) é uniformemente mais poderoso de $H : X \sim U(0,1)$ contra $K' : X \sim \text{Beta}(1,b)$, $b > 1$? Justifique.

Resolução

Sim, pois conforme descrito em a) o teste $\phi(x)$ era mais poderoso, de nível α, para testar H contra K. Ademais, $\phi(x)$ não depende do valor de $b > 0$. Assim, o teste $\phi(x)$ é uniformemente mais poderoso para testar $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1,b), \forall b > 0$, ao nível de significância de α, como mostrou-se em a) $\mathbf{E}_H[\phi(x)] \leq a$.

(c) Existe teste uniformemente mais poderoso de $H : X \sim U(0,1)$, contra $K'' : X \sim \text{Beta}(1,b)$, $b \neq 1$? Justifique.

Resolução

Sejam as hipóteses:

i) $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1,b_1)$, $b_1 > b > 1$. Podemos definir o seguinte teste.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_K(x) > k f_H(x) \\ 0 & \text{se } f_K(x) < k f_H(x), \end{cases}$$

$$f_K(x) = \frac{1}{B(1,b_1)} x^{1-1}(1-x)^{b_1-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b_1 > b > 1 \quad \text{e} \qquad f_H(x) = \mathbf{I}_{(0,1)}(x)$$

$$f_K(x) > k f_H(x)$$

$$\frac{1}{B(1,b_1)} x^{1-1}(1-x)^{b_1-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) > k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b_1 > 1$$

$$\frac{1}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(b_1)}{\Gamma(1+b_1)}} x^{1-1}(1-x)^{b_1-1}\mathbf{I}_{(0,1)}(x) > k\mathbf{I}_{(0,1)}(x),\ b_1 > b > 1$$

$$\ldots \quad \text{análogo ao que foi feito em a)}$$

$$x < \underbrace{1 - \left(\frac{k}{b_1}\right)^{\frac{1}{b_1-1}}}_{k'}$$

$$x < k'$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < k' \\ 0 & \text{se } x > k', \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_H[\phi(x)] &= \alpha \\
P_H(x < k') &= \alpha \\
\int_0^{k'} dx &= \alpha, \text{ H: } X \sim U(0,1) \\
X\Big|_0^{k'} &= \alpha \\
k' &= \alpha
\end{aligned}$$

Assim,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \alpha \\ 0 & \text{se } x > \alpha, \end{cases}$$

é um teste mais poderoso de nível α para testar $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1, b_1)$, sendo $b_1 > b > 1$ fixado. Como $\phi(x)$ não depende do valor de b_1, o teste $\phi(x)$ é uniformemente mais poderoso para testar $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1,b), \forall b > 1$, ao nível de significância de α.

ii) $H : X \sim U(0,1)$ contra $K : X \sim \text{Beta}(1, b_1)$, $0 < b_1 < b < 1$.

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < k/b \\ 0 & \text{se } x > k/b, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{b_1}[\phi(x)] &= P_H(x < k/b) \\
&= (b_1/b)k = \alpha \\
k &= (b/b_1)\alpha
\end{aligned}$$

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{b\alpha}{b_1 b} \\ 0 & \text{se } x > \frac{b\alpha}{b_1 b}, \end{cases}$$

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{\alpha}{b_1} \\ 0 & \text{se } x > \frac{\alpha}{b_1}, \end{cases}$$

Como pode-se observar, o nosso teste $\phi^*(x)$ depende de b_1. Assim, tem-se os seguintes casos:

a) $0 < b_1 < 1$**:**

O teste $\phi^*(x) = 1$ rejeita para maiores valores de x, pois menor valor de b_1, maiores valores para $\frac{\alpha}{b_1}$.

b) $b_1 > 1$**:**

O teste $\phi^*(x)$ rejeita para menores valores de x, pois maior valor de b_1, menores valores para $\frac{\alpha}{b_1}$.

Estes dois casos mostram que o comportamento da função de teste $\phi^*(x)$ está diretamente relacionado ao valor de b_1, e não há um único ponto de corte que funcione uniformemente para todas as alternativas b_1.

Portanto, não existe um teste uniformemente mais poderoso (UMP) para para testar $H : X \sim U(0,1)$, contra $K'' : X \sim \text{Beta}(1,b)$, $b \neq 1$, já que a função de teste $\phi^*(x)$ depende do valor específico de b.

11.) Sejam $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ observações independentes de distribuições normais de média μ_i e variância σ_i^2 para $i = 1, 2$; $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$.

(a) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $H : \mu_1 = \mu_2$ versus $K : \mu_1 \neq \mu_2$ de nível α (com $0 < \alpha < 1$), supondo que σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidos.

Resolução

$$f_1(x,\mu_1,\sigma_1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\}$$

$$f_1(\boldsymbol{x},\mu_1,\sigma_1^2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2\}$$

$$f_2(x,\mu_2,\sigma_2^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\}$$

$$f_2(\boldsymbol{x},\mu_2,\sigma_2^2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\}$$

$$f(\boldsymbol{x_{1i}},\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_i^2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2\}\times\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\}$$

$$L(\boldsymbol{x_{1i}},\mu_1,\mu_2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\times\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\right\}$$

$$\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) = -\frac{n_1}{2}\log\left(2\pi\sigma_2^2\right)-\frac{n_2}{2}\log\left(2\pi\sigma_2^2\right)-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2$$

Sob H_0 $\mu_1=\mu_2$

$$\ell(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2) = -\frac{n_1}{2}\left(2\pi\sigma_2^2\right)-\frac{n_2}{2}\left(2\pi\sigma_2^2\right)-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu)^2$$

$$\frac{d\ell(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)}{d\mu} = -\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu)(-1)-\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu)(-1)$$

$$\frac{d\ell(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu)+\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu)$$

$$\frac{d^2\ell(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)}{d\mu^2} = -\frac{n_1}{\sigma_1^2}-\frac{n_2}{\sigma_2^2}<0,\ \text{logo existe estimador de máxima verossimilhança (MV) para } \mu$$

$$\frac{d\ell(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)}{d\mu} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})+\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}-\frac{n_1\hat{\mu}}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{i2}-\frac{n_2\hat{\mu}}{\sigma_2^2} = 0$$

$$-\frac{n_1\hat{\mu}}{\sigma_1^2}-\frac{n_2\hat{\mu}}{\sigma_2^2} = -\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}-\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{i2}$$

$$\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}\right)\hat{\mu} = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}+\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{i2}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}+\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{i2}}{\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}\right)}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{n_1\bar{x}_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}$$

Sem restrição de H

$\hat{\mu}_1=\bar{X}_1$ e $\hat{\mu}_2=\bar{X}_2$, pois sabe-se que a média é estimador MV para μ

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\frac{\sup_{\mu\in\Theta_0}L(\mu\mid x_1,x_2)}{\sup_{\mu\in\Theta}L(\mu\mid x_1,x_2)}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\frac{\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\times\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2\right\}}{\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\times\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2+\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2+\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\exp\left\{A+B\right\}$$

$$A=-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2+\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2\text{ e }B=-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2+\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2$$

$$A=-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}^2-2\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}+\sum_{i=1}^{n_1}\hat{\mu}^2\right)+\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}^2-2\hat{\mu}_1\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}+\sum_{i=1}^{n_1}\hat{\mu}_1^2\right)$$

$$A=\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(-\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}^2+2\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}-\sum_{i=1}^{n_1}\hat{\mu}^2+\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}^2-2\hat{\mu}_1\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}+\sum_{i=1}^{n_1}\hat{\mu}_1^2\right)$$

$$A=\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(2\hat{\mu}n_1\bar{x}_1-n_1\hat{\mu}^2-2\hat{\mu}_1n_1\bar{x}_1+n_1\hat{\mu}_1^2\right)$$

$$A=\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(2\hat{\mu}\bar{x}_1-\hat{\mu}^2-2\bar{x}_1^2+\bar{x}_1^2\right),\quad\hat{\mu}_1=\bar{x}_1$$

$$A=\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(2\hat{\mu}\bar{x}_1-\hat{\mu}^2-\bar{x}_1^2\right)$$

$$A=-\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(-2\hat{\mu}\bar{x}_1+\hat{\mu}^2+\bar{x}_1^2\right)$$

$$A=-\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(\bar{x}_1-\hat{\mu}\right)^2$$

$$A=-\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(\bar{x}_1-\frac{\frac{n_1\bar{x}_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2$$

$$A=-\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(\frac{\frac{n_1\bar{x}_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2\bar{x}_1}{\sigma_2^2}-\frac{n_1\bar{x}_1}{\sigma_1^2}-\frac{n_2\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2$$

$$A=-\frac{n_1}{2\sigma_1^2}\left(\frac{\frac{\bar{x}_1}{\sigma_2^2}-\frac{n_2\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2$$

$$A=-\frac{n_1n_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2$$

De forma análoga, $B=-\frac{n_2}{2\sigma_2^2}\left(\bar{x}_2-\hat{\mu}\right)^2=-\frac{n_2n_1^2}{2\sigma_2^2\sigma_1^4}\left(\frac{\bar{x}_2-\bar{x}_1}{\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}}\right)^2$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\exp\left\{-\frac{n_1n_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2-\frac{n_2n_1^2}{2\sigma_2^2\sigma_1^4}\left(\frac{\bar{x}_2-\bar{x}_1}{\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}}\right)^2\right\}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\exp\left\{-\frac{n_1n_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2-\frac{n_2n_1^2}{2\sigma_2^2\sigma_1^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}}\right)^2\right\}$$

Rejeita-se H, se: $\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)<c,\ c\in(0,1)$

$$\exp\left\{-\frac{n_1 n_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_1}{\sigma_1^2}+\frac{n_2}{\sigma_2^2}}\right)^2-\frac{n_2 n_1^2}{2\sigma_2^2\sigma_1^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}}\right)^2\right\}<c$$

$$\exp\left\{-\left[\frac{n_1 n_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^4}+\frac{n_2 n_1^2}{2\sigma_2^2\sigma_1^4}\right]\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}}\right)^2\right\}<c$$

$$-\left[\frac{n_1 n_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^4}+\frac{n_2 n_1^2}{2\sigma_2^2\sigma_1^4}\right]\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\left(\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}\right)^2}<c'$$

$$-\left(\frac{n_1 n_2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\left[\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}\right]\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\left(\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}\right)^2}<c'$$

$$-\left(\frac{n_1 n_2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\left(\frac{n_2}{\sigma_2^2}+\frac{n_1}{\sigma_1^2}\right)}<c'$$

$$-\left(\frac{n_1 n_2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\left(\frac{n_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{n_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)}<c'$$

$$-\frac{n_1 n_2}{2}\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{n_2\sigma_1^2+n_1\sigma_2^2}\right]\frac{\frac{1}{n_1 n_2}}{\frac{1}{n_1 n_2}}<c'$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]<c'$$

$$\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]>c'$$

$$\left[\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right]^2>c'$$

$$[Z]^2>c', \text{Z é normal padrão}$$

$$[Z]^2\sim\chi_1^2$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\sim\chi_1^2$$

$$\phi(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\sim\chi_1^2>c''\\ 0 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\sim\chi_1^2<c''\end{cases}$$

$$\mathbf{E}_H[\phi(x,y)]=\alpha$$

$$P_H\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}>c''\right]=\alpha$$

$$1-P_H\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq c''\right]=\alpha$$

$$P_H\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq c''\right]=1-\alpha$$
$$P_H\left[\chi_1^2\leq c''\right]=1-\alpha$$
$$c''=\chi^2_{1,\,1-\alpha}$$

$$\phi(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}>\chi^2_{1,\,1-\alpha} \quad \text{(Aqui o teste rejeita H)}\\ 0 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\chi^2_{1,\,1-\alpha} \quad \text{(Aqui o teste não rejeita H)}\end{cases}$$

(b) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $H:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ versus $K:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ de nível α.
Resolução

$$f_1(\boldsymbol{x},\mu_1,\sigma_1^2)\overset{ind}{=}\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2\}$$
$$f_2(\boldsymbol{x},\mu_2,\sigma_2^2)\overset{ind}{=}\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\}$$
$$L(\boldsymbol{x_{1i}},\mu_1,\mu_2)\overset{ind}{=}\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}}\times\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\right\}$$
$$\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=-\frac{n_1}{2}\log(\sigma_1^2)-\frac{n_2}{2}\log(\sigma_2^2)-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2$$

Sob H_0 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

$$\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=-\frac{n_1}{2}\log\left(\sigma^2\right)-\frac{n_2}{2}\log\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2$$
$$\frac{d\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n_1}{2\sigma^2}-\frac{n_2}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2$$
$$\frac{d^2\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{d(\sigma^2)^2}=\frac{n_1}{2\sigma^4}+\frac{n_2}{2\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2-\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2<0 \text{ logo existe estimador MV}$$
$$\frac{d\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{d\sigma^2}=0$$

$$-\frac{n_1}{2\hat{\sigma}^2}-\frac{n_2}{2\hat{\sigma}^2}+\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2+\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2=0$$
$$-\frac{n_1}{2\hat{\sigma}^2}-\frac{n_2}{2\hat{\sigma}^2}=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\right]$$
$$-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left(n_1+n_2\right)=-\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\right]$$
$$\left(n_1+n_2\right)\hat{\sigma}^2=\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\right]$$
$$\hat{\sigma}^2=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right]}{n_1+n_2} \text{ estimativa viesada}$$
$$\hat{\sigma^*}^2=S^2=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right]}{n_1+n_2-2} \quad \text{estimativa não viesada}$$
$$\hat{\sigma^*}^2=S^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Sem restrição de H

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2}{n_1} \text{ e } \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2}{n_2}, \text{ já é de conhecimento}$$

No entanto estas estimativas são viesadas para a variância

$$\hat{\sigma^*}_1^2 = S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2}{n_1-1} \text{ e } \hat{\sigma^*}_2^2 = S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2}{n_2-1}, \text{ estimativas não viesados}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \frac{\sup_{\sigma\in\Theta_0} L(\sigma \mid x_1,x_2)}{\sup_{\sigma\in\Theta} L(\sigma \mid x_1,x_2)}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \frac{\left(2\pi\hat{\sigma^*}^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \times \left(2\pi\hat{\sigma^*}^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}}{\left(2\pi\hat{\sigma^*}_1^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \times \left(2\pi\hat{\sigma^*}_2^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma^*}_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma^*}_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \frac{\left(\hat{\sigma^*}^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \times \left(\hat{\sigma^*}^2\right)^{-\frac{n_2}{2}}}{(\hat{\sigma^*}_1^2)^{-\frac{n_1}{2}}(\hat{\sigma^*}_2^2)^{-\frac{n_2}{2}}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}(n_1-1)S_1^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}(n_2-1)S_2^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma^*}_1^2}(n_1-1)S_1^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma^*}_2^2}(n_2-1)S_2^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \left(\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}{S_1^2}\right)^{-\frac{n_1}{2}} \left(\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}{S_2^2}\right)^{-\frac{n_2}{2}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}(n_1-1)S_1^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}(n_2-1)S_2^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2S_1^2}(n_1-1)S_1^2 - \frac{1}{2S_2^2}(n_2-1)S_2^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \left(\frac{S_1^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{S_2^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_2}{2}} \times A$$

$$A = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}(n_1-1)S_1^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma^*}^2}(n_2-1)S_2^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2S_1^2}(n_1-1)S_1^2 - \frac{1}{2S_2^2}(n_2-1)S_2^2\right\}}$$

$$A = \frac{\exp\left\{-\frac{(n_1-1)S_1^2}{2\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)} - \frac{(n_2-1)S_2^2}{2\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}(n_1-1) - \frac{1}{2}(n_2-1)\right\}}$$

$$A = \frac{\exp\left\{-\frac{(n_1-1)(n_1+n_2-2)S_1^2}{2\left((n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right)} - \frac{(n_2-1)(n_1+n_2-2)S_2^2}{2\left((n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right)}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}(n_1-1) - \frac{1}{2}(n_2-1)\right\}}$$

$$A = \frac{\exp\left\{-\frac{\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right](n_1+n_2-2)}{2\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}(n_1-1) - \frac{1}{2}(n_2-1)\right\}}$$

$$A = \frac{\exp\left\{-\frac{(n_1+n_2-2)}{2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[n_1+n_2-2\right]\right\}}$$

$$A = 1$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \left(\frac{S_1^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{S_2^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_2}{2}} \times 1$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \left(\frac{S_1^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{S_2^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_2}{2}}$$

Rejeita se $\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) < c, c \in (0,1)$

$$\left(\frac{S_1^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(\frac{S_2^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)^{\frac{n_2}{2}} < c$$

$$\left(\frac{S_1^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)\left(\frac{S_2^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right) < c'$$

$$\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} < c'$$

$$\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} \sim F_{(n_2-1,n_1-1)}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} < c' \text{ ou } > c'' \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[\phi(x)] = \alpha$$

$$P_H\left[\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} < c'\right] = \alpha$$

$$1 - P_H\left[\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} \geq c'\right] = \alpha$$

$$P_H\left[\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} \geq c'\right] = 1-\alpha$$

$$c' = F_{(n_1-1,n_2-1,1-\alpha)}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1-1}\right)\left(\frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^2} < F_{(n_1-1,n_2-1,1-\alpha_1)} \text{ ou } > F_{(n_1-1,n_2-1,1-\alpha_2)} \quad \alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ 0 & c.c \end{cases}$$

(c) Suponha agora que as variâncias são desconhecidas, mas iguais (isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$), e refaça a parte (a).

Resolução

$$f_1(\boldsymbol{x}, \mu_1, \sigma_1^2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2\}$$

$$f_2(\boldsymbol{x}, \mu_2, \sigma^2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\}$$

$$f(\boldsymbol{x_{1i}}, \mu_1, \mu_2, \sigma^2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2\} \times \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\}$$

$$L(\boldsymbol{x_{1i}}, \mu_1, \mu_2) \overset{ind}{=} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \times \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2\right\}$$

$$\ell(\mu_1,\mu_2,\sigma^2,\sigma^2) = -\frac{n_1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{n_2}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu_2)^2$$

Sob H_0 $\mu_1 = \mu_2$

$$\ell(\mu,\sigma^2) = -\frac{n_1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{n_2}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu)^2$$

$$\frac{d\ell(\mu,\sigma^2)}{d\mu} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu)(-1) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu)(-1)$$

$$\frac{d\ell(\mu,\sigma^2)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\mu) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\mu)$$

$$\frac{d^2\ell(\mu,\sigma^2)}{d\mu^2} = -\frac{n_1}{\sigma^2} - \frac{n_2}{\sigma^2} < 0, \text{ logo existe estimador de máxima verossimilhança (MV) para } \mu$$

$$\frac{d\ell(\mu,\sigma^2)}{d\mu} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1} - \frac{n_1\hat{\mu}}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{i2} - \frac{n_2\hat{\mu}}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1} - n_1\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{n_2}x_{i2} - n_2\hat{\mu} = 0$$

$$(n_1+n_2)\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n_2}x_{i2} + \sum_{i=1}^{n_1}x_{i1}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}x_{i1} + \sum_{i=1}^{n_2}x_{i2}}{n_1+n_2} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

Sem restrição de H

$\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1$ e $\hat{\mu}_2 = \bar{X}_2$, pois sabe-se que a média é estimador MV para μ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right]}{n_1+n_2} \text{ estimativa viesada}$$

$$\hat{\sigma^*}^2 = S^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right]}{n_1+n_2-2} \quad \text{estimativa não viesada}$$

$$\hat{\sigma^*}^2 = S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \frac{\sup_{\mu\in\Theta_0} L(\mu \mid x_1,x_2)}{\sup_{\mu\in\Theta} L(\mu \mid x_1,x_2)}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \frac{\left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \times \left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2\right\}}{\left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-\frac{n_1}{2}} \times \left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2\right\}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \exp\left\{A+B\right\}$$

$$A = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu})^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1}-\hat{\mu}_1)^2$$

$$A = -\frac{n_1 n_2^2}{2\hat{\sigma}^2\hat{\sigma}^4}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\frac{n_1}{\hat{\sigma}^2}+\frac{n_2}{\hat{\sigma}^2}}\right)^2 \quad \text{demostrado em a) para } \sigma_i^2 \text{ conhecidos}$$

$$A = -\frac{n_1 n_2^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2$$

$$B = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu})^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2}-\hat{\mu}_2)^2$$

De forma análoga, $B = -\frac{n_2 n_1^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \exp\left\{-\frac{n_1 n_2^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 - \frac{n_2 n_1^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2\right\}$$

Rejeita-se H, se:

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) < c,\ c \in (0,1)$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) = \exp\left\{-\frac{n_1 n_2^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 - \frac{n_2 n_1^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{n_1 n_2^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 - \frac{n_2 n_1^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2\right\} < c$$

$$-\frac{n_1 n_2^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 - \frac{n_2 n_1^2}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 < c'$$

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 > c'$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 > c'$$

$$\frac{1}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\left(\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{n_1+n_2}\right)^2 > c'$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\frac{1}{(n_1+n_2)^2} > c'$$

Sabe-se que $\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$

$$(t_{n_1+n_2-2})^2 \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \sim F_{1,n_1+n_2-2,\alpha}$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\frac{1}{(n_1+n_2)^2} \sim F_{n_1+n_2-1,n_1+n_2-2,\alpha}$$

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \frac{1}{(n_1+n_2)^2} > c' \\ 0 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \frac{1}{(n_1+n_2)^2} < c' \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_H[\phi(x,y)] = \alpha$$

$$P_H\left[\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \frac{1}{(n_1+n_2)^2} > c''\right] = \alpha$$

$$c' = F_{n_1+n_2-1,n_1+n_2-2,\alpha}$$

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \frac{1}{(n_1+n_2)^2} > F_{n_1+n_2-1,n_1+n_2-2,\alpha} \\ 0 & \text{se } \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \frac{1}{(n_1+n_2)^2} < F_{n_1+n_2-1,n_1+n_2-2,\alpha} \end{cases}$$