UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Programa de Pos-Graduação em Estatística

Alex Monito Nhancololo

1 Medida de possibilidade: Conceitos básicos

Seja Ω um espaço amostral não vazio e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em Ω, formando o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$.
Uma função $\mathrm{Pos}(\cdot) : \mathcal{A} \longrightarrow [0.1]$ é uma medida de possibilidade se, e somente se, satisfaz os seguintes axiomas:

(P1) $\mathrm{Pos}(\emptyset) = 0$ e $\mathrm{Pos}(\Omega) = 1, \forall\, \Omega \neq \emptyset$.

(P2) $\forall A \in \mathcal{A}$ com $A \neq \emptyset$, $\mathrm{Pos}\ (\mathrm{A}) = \sup_{a \in A} \mathrm{Pos}\ (\{\mathrm{a}\})$.

Ademais, pelos Teoremas 1.2.1 e 1.2.3 definidos em Patriota (2025), sabe-se que para qualquer coleção (finita ou infinita) de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ em $\mathcal{A}$, tem-se:

(a) $\mathrm{Pos}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \mathrm{Pos}(A_i) = \max\{\mathrm{Pos}(A_1), \mathrm{Pos}(A_2), \ldots\}$

(b) $\forall \mathrm{A},\ A^c \ \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Pos}(A) = 1$ ou $\mathrm{Pos}\ (A^c) = 1$

(c) $\mathrm{Pos}(A) = 1 - \mathrm{Nec}(A^c)$ e $\mathrm{Nec}(A) = 1 - \mathrm{Pos}(A^c)$,

em que $\mathrm{Nec}(\cdot) : \mathcal{A} \longrightarrow [0.1]$ é uma medida dual da medida de possibilidade, denominada medida de necessidade, satisfazendo:

(a) $\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Nec}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \inf_{i \in I}\{\mathrm{Nec}(A_i)\} = \min\{\mathrm{Nec}(A_1), \mathrm{Nec}(A_2), \ldots\}$.

(b) $\forall$ A, $A^c \ \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Nec}(A) = 0$ ou $\mathrm{Nec}\ (A^c) = 0$. conforme descrito em Dubois e Prade (2011).

A medida de necessidade avalia a certeza absoluta de uma proposição, sendo verdadeira em todos os cenários possíveis, enquanto a possibilidade mede se ela é consistente com pelo menos um desses cenários (Patriota, 2025). Observe que, diferentemente da medida de probabilidade que é auto-dual, i.e., $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c)$, as medidas de possibilidade e necessidade são duais entre si, mas não auto-duais (Friedman, Halpern, 1995). Conforme descrito por Dubois e Prade (2011), $\forall A_i, A_j \in \mathcal{A}, i \neq j$, se $\mathrm{Pos}(A_i) = 1$ e $\mathrm{Pos}(A_j) = 0$, tem-se completo conhecimento. No entanto, se $\forall A \in \mathcal{A}, \mathrm{Pos}(A) = 1$, tem-se completa ignorância.
As propriedades das medidas de possibilidade e necessidade estabelecem a base para a extensão destes conceitos ao caso de medida de possibilidade condicional, que é o objetivo deste trabalho e se apresenta na próxima seção.

2 Medida de Possibilidade Condicional

Conforme descrito por Cooman (1997), sob inspiração da probabilidade condicional, a medida de possibilidade condicional foi primeiramente introduzida por Zadeh (1978) e, no mesmo ano, Hisdal (1978) aperfeiçoou-a. Fora estes autores, várias contribuições ligadas à medida de possibilidade condicional foram publicadas, sob autoria de Dubois e Prade (1984-1985, 1988, 1990. 2011,2014), Dubois et al. (1994), Ramer (1989), Bouchon-Meunier, Coletti e Marsala (2002), Marchioni (2005), Flaminio, Godo, & Rosella, (2024), entre outros.

2 Definição

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pos})$ um espaço de possibilidade e $A, B \in \mathcal{A}$ eventos, com $\mathrm{Pos}(B) > 0$. Segundo a abordagem de Dubois e Prade (1988, 2011), a possibilidade condicional é definida como:

$$\mathrm{Pos}(A \mid B) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathrm{Pos}(A \cap B) = \mathrm{Pos}(B), \\ \mathrm{Pos}(A \cap B), & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1}$$

para $\mathrm{Pos}(A \cap B) = \mathrm{Pos}(A|B) * \mathrm{Pos}(B) = \min\left\{\mathrm{Pos}(A|B), \mathrm{Pos}(B)\right\}$, e $\mathrm{Nec}(B|A) = 1 - \mathrm{Pos}(B^c|A)$, em que $*$ é um operador de fatoração ordinal, que representa o mínimo e não pode ser visto como produto (Dubois e Prade, 2011).
De acordo com Dubois e Prade (2014), a necessidade condicional $\mathrm{Nec}(B \mid A) > 0$ se, e somente se, $\mathrm{Pos}(B \cap A) > \mathrm{Pos}(B^c \cap A)$. Além disso, quando $\mathrm{Nec}(B \mid A) > 0$ vale $\mathrm{Nec}(B \mid A) = \mathrm{Nec}(A^c \cup B)$. É fácil notar ainda que $\mathrm{Pos}(B \mid A) > \mathrm{Pos}(B)$ implica $\mathrm{Pos}(B \mid A) = 1$.

Para que a definição 1 seja de fato uma medida de possibilidade (para B fixo), é necessário satisfazer os seguintes axiomas P1 e P2, definidos na seção 1:

P1: $\text{Pos}(\emptyset) = 0$ e $\text{Pos}(\Omega) = 1, \forall\, \Omega \neq \emptyset$

- Para $A = \emptyset$: Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pos})$ um espaço de possibilidade e $A, B \in \mathcal{A}$ eventos, com $\text{Pos}(B) > 0$.

  $A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset \implies \text{Pos}(\emptyset \cap B) = \text{Pos}(\emptyset) = 0$. Como $\text{Pos}(B) > 0$, tem-se $\text{Pos}(A \cap B) = 0 \neq \text{Pos}(B)$. Portanto, pela definição 1, $\text{Pos}(A \mid B) = \text{Pos}(\emptyset \mid B) = \text{Pos}(\emptyset \cap B) = \text{Pos}(\emptyset) = 0$.

- Para $A = \Omega$: $\Omega \cap B = B \implies \text{Pos}(\Omega \cap B) = \text{Pos}(B)$. Como $\text{Pos}(\Omega \cap B) = \text{Pos}(B)$, pela definição 1, $\text{Pos}(\Omega \mid B) = \text{Pos}(B) = 1$.

P2: $\forall A \in \mathcal{A}$ com $A \neq \emptyset$, Pos (A) $= \sup_{a \in A}$ Pos ({a})
Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pos})$ um espaço de possibilidade, onde Pos é uma medida de possibilidade satisfazendo os aximas P1 e P2 definidos na seção 1, queremos mostrar que $\text{Pos}(U \mid B) = \sup_{i \in I} \text{Pos}(A_i \mid B)$, $\forall U = \bigcup_{i \in I} A_i,\ A_i \in \mathcal{A}$.

- Caso 1: $\text{Pos}(U \cap B) = \text{Pos}(B)$.

  Pela definição 1, $\text{Pos}(\cdot \mid B) = \text{Pos}(U \mid B) = \text{Pos(B)} = 1$ e pela propriedade (P2) seção 1, temos:

$$\text{Pos}(U \cap B) = \sup_{i \in I} \text{Pos}(A_i \cap B) = \text{Pos}(B) = \sup_{a \in B} \text{Pos}(a).$$

Logo, existe uma sequência $\{i_n\} \subseteq I$ tal que $\lim_{n \to \infty} \text{Pos}(A_{i_n} \cap B) = \text{Pos}(B)$. Para cada $i \in I$, tem-se $\text{Pos}(A_i \cap B) \leq \text{Pos}(B)$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $j \in I$ tal que $\text{Pos}(A_j \cap B) > \text{Pos}(B) - \varepsilon$. Se $\text{Pos}(A_j \cap B) = \text{Pos}(B)$, então $\text{Pos}(A_j \mid B) = 1$. Caso contrário, $\text{Pos}(A_j \mid B) = \text{Pos}(A_j \cap B)$. Assim, $\text{Pos}(U \mid B) = \sup_{i \in I} \text{Pos}(A_i \mid B) = 1$

- Caso 2: $\text{Pos}(U \cap B) < \text{Pos}(B)$.

Como $\text{Pos}(U \cap B) < \text{Pos}(B)$, segue que para todo $i \in I$, $\text{Pos}(A_i \cap B) < \text{Pos}(B)$. Portanto, pela definição 1 e axioma P2 da seção 1, $\text{Pos}(U \mid B) = \text{Pos}(U \cap B) = \sup_{i \in I} \text{Pos}(A_i \cap B) = \sup_{i \in I} \text{Pos}(A_i \mid B) = \sup_{i \in I} \text{Pos}(A_i \cap B) = \text{Pos}(U \cap B) = \text{Pos}(U \mid B)$.
Portanto, a função $\text{Pos}(\cdot \mid B)$, satisfaz os axiomas (P1 e P2) de uma medida de possibilidade em espaços.

3 Teoremas

Antes de enunciar os teoremas, definirei o conceito de *t-norma* que será usado ao longo do texto e que pode ser encontrado em Bouchon-Meunier, Coletti e Marsala (2002).
Uma *t-norma* é uma função $\odot : [0.1] \times [0.1] \to [0.1]$ que generaliza a conjunção lógica, satisfazendo: (1) Comutatividade: $a \odot b = b \odot a$; (2) Associatividade: $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$; (3) Monotonicidade: $a \leq c \Rightarrow a \odot b \leq c \odot b$ e, (4) Elemento neutro: $a \odot 1 = a$.
O operador mínimo (min) definido na seção 2.1 é uma t-norma (a maior possível).

3 Teorema 1: Caracterização com operador mínimo

Seja Ω finito, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ fechado sob união. Para $\text{Pos} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0.1]$, são equivalentes:

(a) Pos é medida de possibilidade condicional (Definição (1)).

(b) Existe família única $\{\text{Pos}_\alpha\}$ de medidas de possibilidade em $\mathcal{A}$ tal que:

$$\text{Pos}(A \mid B) = x \iff \text{Pos}_\alpha(A \cap B) = \min\{x, \text{Pos}_\alpha(B)\}, \text{ onde } \alpha \text{ é único índice com } B \in \mathcal{A}_\alpha$$

3 Teorema 2: Caracterização para t-normas contínuas

Seja $\odot$ uma t-norma contínua. São equivalentes: (a) Pos é uma medida de possibilidade condicional relative a $\odot$, isto é, satisfaz: (i) Para cada $B \in \mathcal{B}$, $\text{Pos}(\cdot \mid B)$ é uma medida de possibilidade. (ii) Para todo $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, vale $\text{Pos}(A \cap B) = \text{Pos}(A \mid B) \odot \text{Pos}(B)$. (iii) $\sup_{x \in B} \text{Pos}(\{x\} \mid B) = 1$.
(b) Existe uma família $\{\text{Pos}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de medidas de possibilidade em $\mathcal{A}$ tal que, para cada $B \in \mathcal{B}$, se $\alpha = \max\{\beta \in I : B \in \mathcal{A}_\beta\}$, então $\text{Pos}(A \mid B)$ é a única solução da equação $\text{Pos}_\alpha(A \cap B) = \text{Pos}_\alpha(B) \odot x$, e para todo $\beta \in I$ com $B \in \mathcal{A}_\beta$, vale $\text{Pos}_\beta(A \cap B) = \text{Pos}(A \mid B) \odot \text{Pos}_\beta(B)$.
Nota: A demostração dos teoremas acima está no apêndice.

4 Exemplo:

Considere um diagnóstico médico onde avalia-se as possibilidades de gripe (G) e dengue (D) com base em sintomas. Seja o espaço amostral, $\Omega = \{\text{pacientes com sintomas similares}\}$. Definimos os eventos F: paciente tem febre alta ($> 39°C$), M: paciente tem dores musculares intensas, G: paciente tem gripe e, D: paciente tem dengue. Com base na experiência, o médico atribui as seguintes possibilidades: $\text{Pos}(F) = 0.9, \text{Pos}(M) = 0.7, \text{Pos}(G) = 0.8, \text{Pos}(D) = 0.6, \text{Pos}(F \cap M) = 0.7, \text{Pos}(G \cap F) = 0.7, \text{Pos}(D \cap F) = 0.6, \text{Pos}(D \cap F \cap M) = 0.5$.
a) Um paciente apresenta febre alta (F). Qual a possibilidade de ter dengue?
Resolução:
A possibilidade condicional é definida por: $\text{Pos}(D \mid F) = \begin{cases} 1, & \text{se Pos}(D \cap F) = \text{Pos}(F) \\ \text{Pos}(D \cap F), & \text{caso contrário} \end{cases}$
Como $\text{Pos}(D \cap F) = 0.6 < 0.9 = \text{Pos}(F)$, $\text{Pos}(D \mid F) = 0.6$. Assim, a possibilidade de dengue dado febre alta é de 60%.

b) O mesmo paciente também apresenta febre alta e dores musculares. Qual a possibilidade de ter dengue??
Resolução:
Queremos $\text{Pos}(D \mid F \cap M)$, pela definição: $\text{Pos}(D \mid F \cap M) = \begin{cases} 1 & \text{se Pos}(D \cap F \cap M) = \text{Pos}(F \cap M) \\ \text{Pos}(D \cap F \cap M) & \text{caso contrário} \end{cases}$
Como $\text{Pos}(D \cap F \cap M) = 0.5$ e $\text{Pos}(F \cap M) = 0.7$, temos que $0.5 < 0.7$, então: $\text{Pos}(D \mid F \cap M) = 0.5$. Portanto, a possibilidade de dengue dado febre e dores musculares é de 50%.

5 Exercício 2: Apostas perdidas

Considere o espaço de estados climáticos exaustivo e mutuamente exclusivo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, onde ω_1 = chuva forte; ω_2 = apenas nublado; ω_3 = sol. Definamos os eventos $H_1 = \{\omega_1\}$, $H_2 = \{\omega_2\}$, $H_1 \cup H_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$. Temos $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. O jogador especifica os valores (graus de crença) para a função $P(\cdot)$ associada a cada evento H_i em questão, que violam os princípios da probabilidade: $P(\Omega \mid E) = 1, P(\emptyset \mid E) = 0.P(H_1 \mid E) = 0.6, P(H_2 \mid E) = 0.5$, $P(H_1 \cup H_2 \mid E) = 0.8.$, em que E $\neq \emptyset$ é o conhecimento que o jogador dispõe. A banca, percebendo esta incoerência, decide apostar contra H_1, H_2 e a favor de $H_1 \cup H_2$ e fixar uma quantidade monetária (T) de R$ 1.00, para cada par (H, E). Seguindo o descrito em Patriota (2025), seção justificativas, se H_i (aposta da banca) ocorrer a banca terá o ganho $b_{H_i,E}$ e o jogador terá esse prejuízo. Se H_i^c (o que a banca não apostou) ocorrer o jogador terá o ganho $a_{H_i,E}$ e a banca terá esse prejuízo. Assim, com base nas crenças do jogador e no valor da aposta fixado pela banca temos:

- Contra H_1: $a_{H_1,E} = P(H_1 \mid E) \times T = \text{R\$}\,0.60$ e $b_{H_1,E} = 1 - P(H_1 \mid E) \times T = \text{R\$}0.40$.
- Contra H_2: $a_{H_2,E} = P(H_2 \mid E) \times T = \text{R\$}\,0.50$ e $b_{H_1,E} = \text{R\$}0.50$.
- A favor de $(H_1 \cup H_2)$: $a_{H_3,E} = P\left((H_1 \cup H_2) \mid E\right) \times T = (1 - 0.8) \times T = \text{R\$}\,0.20$ e $b_{H_3,E} = \text{R\$}0.80$.

Tabela 1: Resultados possíveis das apostas em cada hipótese H_i para os eventos climáticos ω_i. Os sinais (+) e (-) indicam, respectivamente, ganho e perda em reais para o jogador (banca) para os eventos H_1, H_2 e $(H_1 \cup H_2)$.

		Lucro líquido	
H_1	H_2	Jogador	Banca
F	V	$-0.40 + 0.50 - 0.80 = -0.70$	$+0.40 - 0.50 + 0.80 = +0.70$
F	F	$-0.40 - 0.50 + 0.20 = -0.70$	$+0.40 + 0.50 - 0.20 = +0.70$
F	V	$-0.40 + 0.50 - 0.80 = -0.70$	$+0.40 - 0.50 + 0.80 = +0.70$

Como demonstrado na Tabela 1, independentemente do estado climático que se observe, o jogador incorre em uma perda líquida certa de R$ 0.70 para a configuração analisada. Consequentemente, a banca aufere garantido de R$ 0.70.

6 Comentário

O exercício acima mostra o risco que se pode incorrer caso não respeite os axiomas da probabilidade no jogo das apostas. A incoerência aqui, $P(H_1 \cup H_2) \neq P(H_1) + P(H_2)$ para $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, viola o axioma da aditividade finita. A banca, ao explorar esta violação, criou um cenário de apostas cujo valor é negativo para o jogador em todos os eventos climáticos. Isto torna a situação do jogador análoga a uma arbitragem, onde a banca tem uma oportunidade de lucro livre de risco.
Como discutido por Waidacher (1997), o *Dutch Book Arguments* assume que o jogador está disposto a aceitar qualquer aposta considerada "justa"por suas próprias crenças. Se um jogador viola esses axiomas, suas crenças podem levá-lo a aceitar transações que inevitavelmente pioram sua posição financeira, independentemente de como são configurados os eventos que fazem parte do jogo. Para evitar ser explorado, o jogador deve garantir que suas probabilidades subjetivas satisfaçam todos os axiomas da teoria da probabilidade, incluindo a aditividade para eventos mutuamente exclusivos.

Referências

[1] BOUCHON-MEUNIER, B.; COLETTI, G.; MARSALA, C. Independence and possibilistic conditioning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, v. 35, n. 1, p. 107-123, 2002.

[2] COOMAN, G. D. Possibility theory II: Conditional possibility. *International Journal of General Systems*, v. 25, n. 4, p. 325-351, 1997.

[3] DUBOIS, D.; PRADE, H. Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited. *Cybernetics and Systems*, v. 15, p. 293-331, 1984.

[4] DUBOIS, D.; PRADE, H. **Théorie des possibilités**. Paris: Masson, 1985.

[5] DUBOIS, D.; PRADE, H. The treatment of uncertainty in knowledge-based systems using fuzzy sets and possibility theory. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 3, n. 2, p. 141-165, 1988.

[6] DUBOIS, D.; PRADE, H. **Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty**. New York: Plenum Press, 1988.

[7] DUBOIS, D.; PRADE, H. Aggregation of possibility measures. In: SLOWINSKI, R. (Ed.). **Multiperson decision making models using fuzzy sets and possibility theory**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1990. p. 55-63.

[8] DUBOIS, D.; FARÍAS DEL CERRO, L.; HERZIG, A.; PRADE, H. An ordinal view of independence with application to plausible reasoning. In: **Uncertainty in artificial intelligence**, 10., 1994, Seattle. Proceedings [...]. San Mateo: Morgan Kaufmann, 1994. p. 195-203.

[9] DUBOIS, D.; PRADE, H. Possibility theory and its applications: Where do we stand?. Toulouse: IRIT-CNRS, Université Paul Sabatier, 2011. p. 31-60.

[10] DUBOIS, D.; PRADE, H. Possibilistic logic—an overview. *Handbook of the History of Logic*, v. 9, p. 283-342, 2014.

[11] FLAMINIO, T.; GODO, L.; ROSELLA, G. Possibility of conditionals and conditional possibilities: from the triviality result to possibilistic imaging. In: **International conference on principles of knowledge representation and reasoning**, 21., 2024. Anais [...]. p. 1-10.

[12] FRIEDMAN, N.; HALPERN, J. Y. **Plausibility measures: a user's guide**. arXiv preprint arXiv:1302.4947, 2013. Disponível em: `https://arxiv.org/abs/1302.4947`. Acesso em: 8 set. 2025.

[13] HISDAL, E. Conditional possibilities independence and noninteraction. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 1, n. 4, p. 283-297, 1978.

[14] PATRIOTA, A. G. **Fundamentos da Estatística Clássica e do Aprendizado de Máquinas: notas de aula**. São Paulo: IME-USP, 2025.

[15] RAMER, A. Conditional possibility measures. *Cybernetics and Systems*, v. 20. n. 3, p. 233-247, 1989.

[16] RAMER, A.; PUFLEA-RAMER, R. Uncertainty as the basis of possibility conditioning. In: **International symposium on uncertainty modeling and analysis**, 2., 1993, College Park. Anais [...]. IEEE, 1993.

[17] WAIDACHER, C. Hidden assumptions in the Dutch book argument. *Theory and Decision*, v. 43, n. 3, p. 293-312, 1997.

[18] ZADEH, L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 1, n. 1, p. 3-28, 1978.

Demonstração do teorema 1

(a) $\Longrightarrow$(b): Assuma que Pos é uma medida de possibilidade condicional conforme a definição (1) em relação a uma medida de possibilidade condicional Pos. Como Ω é finito, constrói-se uma sequência de conjuntos e medidas da seguinte forma:
(1) Seja $B_0 = \Omega$ e defina $\mathrm{Pos}_0(A) = \mathrm{Pos}(A \mid \Omega) = \mathrm{Pos}(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. (2) Para $k \geq 0$, seja $\mathcal{B}_k = \{B \in \mathcal{B} : \mathrm{Pos}_k(B) < 1\}$. Se $\mathcal{B}_k \neq \emptyset$, seja $B_{k+1} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_k} B$. Como $\mathcal{B}$ é fechado sob união, $B_{k+1} \in \mathcal{B}$. Defina $\mathrm{Pos}_{k+1}(A) = \mathrm{Pos}(A \mid B_{k+1})$ para todo $A \in \mathcal{A}$, devido à finitude de Ω, este processo termina após um número finito de passos, digamos m, quando $\mathcal{B}_m = \emptyset$, ou seja, para todo $B \in \mathcal{B}$, $\mathrm{Pos}_m(B) = 1$.
A família $\{\mathrm{Pos}_0 . \mathrm{Pos}_1, \ldots, \mathrm{Pos}_m\}$ é uma família de medidas de possibilidade. Para qualquer $B \in \mathcal{B}$, seja α o menor índice tal que $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$. Tal índice existe porque $\mathrm{Pos}_m(B) = 1$. Para este α, tem-se que $\mathrm{Pos}(B \mid B_\alpha) = 1$, pois $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = \mathrm{Pos}(B \mid B_\alpha) = 1$. Da propriedade da possibilidade condicional, se $\mathrm{Pos}(B \mid B_\alpha) = 1$, então $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}(A \cap B \mid B_\alpha)$ para qualquer $A \in \mathcal{A}$. Portanto, $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}(A \cap B \mid B_\alpha) = \mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B)$. Como $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$, $\min\{x, \mathrm{Pos}_\alpha(B)\} = x$, logo $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = x$ se e somente se $\mathrm{Pos}(A \mid B) = x$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Assume que existe uma família $\{\mathrm{Pos}_\alpha\}$ de medidas de possibilidade em $\mathcal{A}$ tal que para cada $B \in \mathcal{B}$, existe um único índice α com $B \in \mathcal{A}_\alpha$, e $\mathrm{Pos}(A \mid B) = x$ se e somente se $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = \min\{x, \mathrm{Pos}_\alpha(B)\}$. Para $A = B$, $\mathrm{Pos}(B \mid B) = x$ se e somente se $\mathrm{Pos}_\alpha(B \cap B) = \min\{x, \mathrm{Pos}_\alpha(B)\}$, ou seja, $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = \min\{x, \mathrm{Pos}_\alpha(B)\}$. Como $\mathrm{Pos}(B \mid B) = 1$, segue que $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$. Assim, para cada $B \in \mathcal{B}$, $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$.
Seja α_0 o único índice tal que $\Omega \in \mathcal{A}_{\alpha_0}$. Defina a medida de possibilidade condicional $\mathrm{Pos}(A) = \mathrm{Pos}_{\alpha_0}(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Para qualquer $B \in \mathcal{B}$, seja β o único índice tal que $B \in \mathcal{A}_\beta$. Então, $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}_\beta(A \cap B)$, pois $\mathrm{Pos}_\beta(B) = 1$ e $\min\{x, \mathrm{Pos}_\beta(B)\} = x$.
Para mostrar que Pos satisfaz a definição (1), note que $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}_\beta(A \cap B)$. Por construção, $\mathrm{Pos}_\beta(A \cap B) = 1$ se $\mathrm{Pos}(A \cap B) = \mathrm{Pos}(B)$, e $\mathrm{Pos}_\beta(A \cap B) = \mathrm{Pos}(A \cap B)$ caso contrário, onde $\mathrm{Pos}(A \cap B) = \mathrm{Pos}_{\alpha_0}(A \cap B)$ e $\mathrm{Pos}(B) = \mathrm{Pos}_{\alpha_0}(B)$. Portanto, $\mathrm{Pos}(A \mid B) = 1$ se $\mathrm{Pos}(A \cap B) = \mathrm{Pos}(B)$, e $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}(A \cap B)$ caso contrário, o que significa que Pos é uma medida de possibilidade condicional conforme a Definição (1).

Demonstração do teorema 2

Prova (a) $\Longrightarrow$ (b)
A família $\{\mathrm{Pos}_0 . \mathrm{Pos}_1, \ldots, \mathrm{Pos}_m\}$ é uma família de medidas de possibilidade. Para qualquer $B \in \mathcal{B}$, seja α o maior índice tal que $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$. Tal índice existe porque $\mathrm{Pos}_m(B) = 1$. Afirma-se que $\mathrm{Pos}(A \mid B)$ é a única solução de $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = \mathrm{Pos}_\alpha(B) \odot x$. Como $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$ e $1 \odot x = x$ para qualquer t-norma, a equação reduz-se a $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = x$. Portanto, $x = \mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B)$. Mas note que $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = \mathrm{Pos}(A \cap B \mid B_\alpha) = \mathrm{Pos}(A \mid B)$, onde a última igualdade decorre da consistência da medida condicional (devido à propriedade (ii) e à definição de Pos_α). Assim, $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B)$, logo é a única solução. Além disso, para qualquer β com $B \in \mathcal{A}_\beta$, tem-se $\mathrm{Pos}_\beta(A \cap B) = \mathrm{Pos}(A \cap B \mid B_\beta) = \mathrm{Pos}(A \mid B) \odot \mathrm{Pos}(B \mid B_\beta) = \mathrm{Pos}(A \mid B) \odot \mathrm{Pos}_\beta(B)$, onde a segunda igualdade segue da propriedade (ii) aplicada à condicional B_β, e a terceira da definição de Pos_β.

Prova (b) $\Longrightarrow$ (a)
Assume-se a existência da família $\{\mathrm{Pos}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ satisfazendo as condições em (b). Define-se uma medida de possibilidade condicional por $\mathrm{Pos}(A) = \mathrm{Pos}_{\alpha_0}(A)$, onde α_0 é o índice tal que $\Omega \in \mathcal{A}_{\alpha_0}$ (o que existe pela construção). Para qualquer $B \in \mathcal{B}$ com $\mathrm{Pos}(B) > 0$, define-se $\mathrm{Pos}(A \mid B)$ como a única solução de $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = \mathrm{Pos}_\alpha(B) \odot x$, para $\alpha = \max\{\beta : B \in \mathcal{A}_\beta\}$. Note que $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$ por definição de α, logo a equação torna-se $\mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B) = x$, e logo $\mathrm{Pos}(A \mid B) = \mathrm{Pos}_\alpha(A \cap B)$.
Para verificar que $\mathrm{Pos}(\cdot \mid B)$ é uma medida de possibilidade: (1) $\mathrm{Pos}(\emptyset \mid B) = \mathrm{Pos}_\alpha(\emptyset) = 0$. (2) $\mathrm{Pos}(\Omega \mid B) = \mathrm{Pos}_\alpha(\Omega \cap B) = \mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$. (3) Para qualquer coleção $\{A_i\}_{i \in I}$, $\mathrm{Pos}\left(\bigcup_i A_i \mid B\right) = \mathrm{Pos}_\alpha\left(\bigcup_i (A_i \cap B)\right) = \sup_i \mathrm{Pos}_\alpha(A_i \cap B) = \sup_i \mathrm{Pos}(A_i \mid B)$, onde a segunda igualdade vale porque Pos_α é uma medida de possibilidade.
A propriedade (ii) segue diretamente da condição em (b) para $\beta = \alpha_0$: $\mathrm{Pos}(A \cap B) = \mathrm{Pos}_{\alpha_0}(A \cap B) = \mathrm{Pos}(A \mid B) \odot \mathrm{Pos}_{\alpha_0}(B) = \mathrm{Pos}(A \mid B) \odot \mathrm{Pos}(B)$.
Finalmente, a propriedade (iii) ocorre porque $\mathrm{Pos}_\alpha(B) = 1$ implica que existe $x \in B$ com $\mathrm{Pos}_\alpha(\{x\}) = 1$. Então, $\mathrm{Pos}(\{x\} \mid B) = \mathrm{Pos}_\alpha(\{x\} \cap B) = \mathrm{Pos}_\alpha(\{x\}) = 1$, logo $\sup_{x \in B} \mathrm{Pos}(\{x\} \mid B) = 1$.